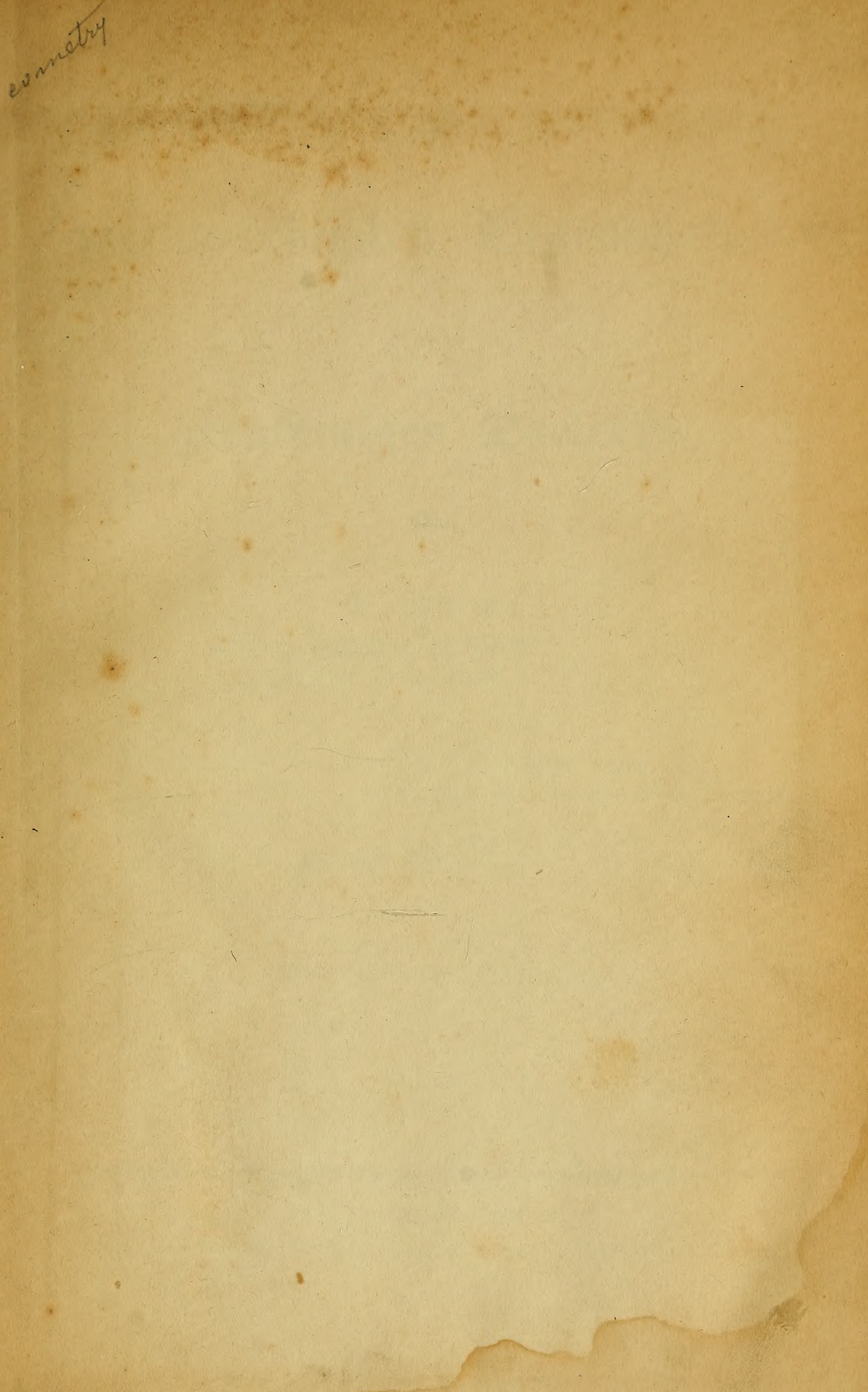


QA482
A19





Die merkwürdigsten Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks.

Von

C. Adams.

Adspice, si quid
Et nos, quod cures proprium fecisse, loquamur.
Hor.



Mit zwei Kupfertafeln.

Koenig

Winterthur 1846.
Druck und Verlag der Steiner'schen Buchhandlung.

Vorrede.

Alte und neue Geometrie zeigen uns die wunderbarsten Gegensätze, und doch sind es nicht zwei, sondern nur eine und dieselbe Wissenschaft. Euclid, Archimedes, Apollonius haben Kunstwerke geschaffen, deren architektonisches Gefüge fest und unverrückbar ist, und die zugleich jene schöne Symmetrie und Eleganz der Form an sich tragen, welche in der alten Welt als ausschließliches Eigenthum der Griechen erscheinen. Monge, Poncelet, Steiner, die Repräsentanten der Jetztzeit sind weniger Künstler in Bezug auf die Darstellung des Einzelnen; aber ihr Blick im Ganzen ist freier, umfassender und großartiger, als der der Griechen.

Was von den Wissenschaften im Allgemeinen, gilt ganz besonders von der Mathematik. — In Bezug auf Fülle des Inhalts haben wir die Alten weit überflügelt; in Bezug auf Schönheit der Darstellung haben wir noch viel von ihnen zu lernen. — Es war ein großer, durchgreifender Gedanke von Descartes und Schooten, das ganze Gebiet des Raumes vermöge der Coordinaten in das Gebiet des Calculs zu ziehen; aber es ist nicht weniger wahr, daß ob diesem Calcul sehr häufig die geometrische Phantasie erlosch, und die Resultate des Calculs in einer Unbestimmtheit erschienen, welche von der Strenge und Bestimmtheit der alten Geometer bedeutend abstach. — Die Allgemeinheit der analytischen Methode machte nichts desto weniger viele Mathematiker gleichgültig gegen die alte

Geometrie: Einige hielten sogar die Geometrie nur für eine spezielle Anwendung der Analysis. — So finden wir namentlich im vorigen Jahrhundert, und ganz besonders in der zweiten Hälfte desselben wenig Sinn für reine Geometrie; alle großen Mathematiker, ein Euler, Lagrange, Laplace waren Analytiker, und zogen durch die Gewalt ihres Genies die dii minorum gentium in ihre Bahnen hinein. — Nur Einzelne pflegten noch die alte Geometrie, vor allen Lambert, später Pfleiderer, Camerer, Hauber ꝛc., doch die letzten größtentheils ohne produktive Kraft, vorzugsweise bemüht, die alten Geometer zu commentiren und die Kenntniß ihrer Werke möglichst zu erhalten. —

Da trat Monge auf mit seiner Géométrie descriptive, und von Neuem erwachte der Sinn für geometrische Studien, der Sinn für die reine Betrachtung der Form. — Als ausgezeichneter Lehrer bildete er ausgezeichnete Schüler und vorzugsweise durch ihn kam die Geometrie dahin, „ihre Allgemeinheit und ihre anschauliche Klarheit leichter über die Mechanik und die physikalisch mathematischen Wissenschaften zu verbreiten.“

Vieles ist seitdem in verwandter und abweichender Richtung, namentlich auch von deutschen Mathematikern geleistet worden; aber die Zeit neuer, großartiger Schöpfungen scheint vorüber zu sein; daher wird es doppelte Pflicht, das Erworbene zu sammeln, und im Einzelnen zu größerer Vollendung auszuarbeiten.

Dieß ist zunächst der Zweck vorliegender Abhandlung. Schon in meinen früheren Arbeiten*) strebte ich, „die neu-

---

*) Die Lehre von den Transversalen in ihrer Anwendung auf die Planimetrie. Winterthur 1843.

Die harmonischen Verhältnisse. Ein Beitrag zur neueren Geometrie. Erster Theil. Winterthur 1845.

ere Geometrie so mit der alten zu verschmelzen, daß jene ihren Charakter der Allgemeinheit, diese ihre wohlbegründete Strenge der Form beibehält, und dennoch beide ein eng verbundenes, abgeschlossenes und organisches Ganze bilden." Dieses Streben und die Durchführung desselben ist von bewährten Kritikern gebilligt und anerkannt worden; daher hoffe ich, daß auch die vorliegende, aus demselben Streben erwachsene Schrift Gnade vor'm Richterstuhl der Kritik finden möge. — Specialschriften, wie diese, scheinen mir nicht bloße curiosa in der mathematischen Literatur zu sein und etwa nur als Uebungsstoff des geometrischen Scharfsinns zu ihrem Dasein berechtigt, sondern ich halte dafür, daß erst dann ein vollständiges und abgerundetes System der Geometrie möglich wird, wenn alle Zweige derselben eine spezielle, möglichst umfassende und klare Bearbeitung erfahren haben. — Daß eine solche Bearbeitung aber zunächst dem Dreiecke zu Theil werde, kann um so weniger auffallen, als sich gerade diese Figur in den meisten Gebilden der Geometrie reproducirt. —

Meine Vorgänger habe ich natürlich benutzt; doch hoffe ich von Sachkennern das Zeugniß zu erhalten, daß auch in dieser Arbeit die Spuren selbstständigen Forschens am Tage liegen. — Manchem dürfte vielleicht die Ueberschrift des ersten Abschnittes auffallen, indem man dabei unwillkürlich an die trigonometrischen Beziehungen zwischen den Winkeln und Seiten des Dreiecks erinnert wird; indeß scheint mir jener Titel wegen seiner Allgemeinheit eben so gut auf die vorliegende Gruppe von Sätzen anwendbar, und hier um so weniger zweideutig, als in der ganzen rein geometrischen Abhandlung von trigonometrischen Beziehungen gar keine Rede sein kann. —

Noch bleibt mir zu erwähnen, daß ich den Hülfssatz im Anfange des 4ten Abschnittes, so wie den eleganten Be-

weis zu Lehrsatz LVIII der Güte des Herrn Joh. Leuzinger, alt Zeichnungslehrer hieselbst, verdanke, eines Mannes, der seltenen Scharfsinn in der Euklidischen Geometrie beurkundet. —

Ob es mir wirklich gelungen, die Strenge der Alten mit dem Geiste der neuern Geometrie zu vereinigen, muß ich dem Urtheile der Sachkenner anheimgeben. Unstreitig läßt dies Schriftchen Vieles zu wünschen, und dankbar werde ich jeden Wink auf Verbesserung hinnehmen. Wenn es aber, mangelhaft, wie es ist, dennoch etwas beiträgt, den Sinn für reine Geometrie zu beleben und auf die herrlichen Fundgruben in diesem so lange brach gelegenen Felde von Neuem aufmerksam zu machen, dann ist der Zweck, welcher mir bei Abfassung desselben vorschwebte, vollständig erreicht. —

Winterthur den 1. November 1845.

C. Adams.

Druckfehler.

Seite 2, Zeile 9 von oben, statt Aa lies $A\alpha$.
" 9 " 18 " " " $\alpha_1\gamma$ " $a_1\gamma$.
" 16 " 5 " unten, statt auf einander stehende lies: senkrecht auf einander stehende.
" 19 " 10 " " " BC lies AC.
" 24 " 13 " " hinter reziproken Werthe muß eingeschaltet werden: der Radien.
" 26 " 9 " oben, statt Deeiecks lies Dreiecks.
" 28 " 12 " unten, statt DP lies DP_1. —
" 35 " 12 " oben, statt Lehrsatz VI lies Lehrsatz IV.
" 38 " 13 " unten, statt um dem lies: in den.
" 43 " 13 " oben, statt Durchmesters lies: Durchmessers.
" 44 " 18 " unten, statt GS_2 lies: GS^2.
" 68 " 14 " " Zusatz. Für die vier ersten Zeilen dieses Zusatzes substituire man Folgendes: Figur 10. Zieht man noch ZB und B_1C_1, so ist $ZH : ZB = AB_1 : AB = B_1C_1 : BC$, mithin auch $AO : 2R = B_1C_1 : BC$. Hieraus folgt:
" 86 " 15 " oben, statt Z_1G lies: Z_1G^2. —
" 86 " 16 " " " OZ^2 lies: OG^2: —
" 103 " 8 und 11 von oben statt DP lies DP_1.



Erster Abschnitt.

Beziehungen zwischen den Winkeln und Seiten des Dreiecks.

Lehrsatz I.

Figur 1, a und b.

Zieht man aus der Ecke A eines Dreiecks ABC zwei Gerade Aa, $A\alpha$ so, daß dieselben mit den anliegenden Dreiecksseiten gleiche Winkel bilden, nämlich $\angle BAa = CA\alpha$, so verhalten sich die Rechtecke aus den einzelnen von B und C bis zu den Theilpunkten a und α gehenden Abschnitten, wie die Quadrate der entsprechenden anliegenden Dreiecksseiten, d. h. es ist

$$Ba.\,B\alpha : Ca.\,C\alpha = AB^2 : AC^2.$$

Beweis.

Es ist

$$\triangle\,ABa : \triangle\,AC\alpha = Ba : C\alpha \text{ und}$$
$$\triangle\,ABa : \triangle\,AC\alpha = AB.\,Aa : AC.\,A\alpha.$$

Hieraus folgt:

$$Ba : C\alpha = AB.\,Aa : AC.\,A\alpha$$

mithin ist

$$\text{(I)}\quad Ba.\,AC.\,A\alpha = C\alpha.\,AB.\,Aa.$$

Eben so hat man

$$\triangle\,AB\alpha : \triangle\,ACa = B\alpha : Ca \text{ und}$$
$$\triangle\,AB\alpha : \triangle\,ACa = AB.\,A\alpha : AC.\,Aa$$

mithin

$$B\alpha : Ca = AB.\,A\alpha : AC.\,Aa \text{ und}$$
$$\text{(II)}\quad B\alpha.\,AC.\,Aa = Ca.\,AB.\,A\alpha.$$

Aus (I) und (II) folgt ferner:

$$Ba.\,B\alpha.\,AC^2 = Ca.\,C\alpha.\,AB^2$$

mithin ist

$$Ba.\,B\alpha : Ca.\,C\alpha = AB^2 : AC^2. —$$

Zusatz 1.

Figur 2, a und b.

Liegt a in der Mitte von BC oder auch in unendlicher Entfernung, so ist Ba = Ca, und man hat folgende Proportion:

$$B\alpha : C\alpha = AB^2 : AC^2 \text{ d. h.:}$$

Wenn man in einem Dreieck ABC eine Gerade Aa aus der Ecke A nach der Mitte a der gegenüberliegenden Seite oder auch mit dieser Seite parallel zieht, und sodann an AC den Winkel $CA\alpha$ aufträgt, welcher dem Winkel BAa gleich ist, so wird die Grundlinie BC durch die Gerade $A\alpha$ so getheilt, daß sich die einzelnen Abschnitte zu einander verhalten, wie die Quadrate der anliegenden Dreiecksseiten.

Ist der Winkel BAC ein Rechter, so steht $A\alpha$ senkrecht auf BC. Da nämlich in diesem Falle

$$\angle\, aAB = \angle\, ABa = 90^\circ - \angle\, ACB \text{ und auch}$$
$$\angle\, CA\alpha = \angle\, aAB, \text{ so ist}$$
$$\angle\, CA\alpha + \angle\, ACB = 90^\circ \text{ mithin auch}$$
$$\angle\, A\alpha C = 90^\circ.$$

Dies führt zu dem bekannten Satze:

Wenn man in einem rechtwinkeligen Dreieck aus dem Scheitel des rechten Winkels ein Perpendikel auf die Hypothenuse zieht, so verhalten sich die dadurch entstehenden Abschnitte der Hypothenuse wie die Quadrate der anliegenden Catheten.

Zusatz 2.

Dividirt man (I) durch (II), so erhält man;

$$\frac{Ba.\ A\alpha}{B\alpha.\ Aa} = \frac{C\alpha.\ Aa}{Ca.\ A\alpha} \text{ mithin}$$

ist auch

$$\frac{Ba.\ Ca.}{B\alpha.\ C\alpha} = \frac{Aa^2}{A\alpha^2} \text{ oder}$$

$$Ba.\ Ca : B\alpha.\ C\alpha = Aa^2 : A\alpha^2 \text{ d. h.:}$$

zieht man in einem Dreieck ABC aus einer Ecke A zwei Geraden Aa, $A\alpha$ so, daß dieselben mit den anliegenden Dreiecksseiten gleiche Winkel bilden, so verhalten sich die Quadrate dieser Geraden eben so, wie die Rechtecke aus den entsprechenden Abschnitten der dritten Dreiecksseite.

Lehrsatz II.

Figur 1, a und b.

Umgekehrt: Ist die Seite BC eines Dreiecks ABC in den Punkten a und α so getheilt, daß die Relation:

$$Ba.\,B\alpha : Ca.\,C\alpha = AB^2 : AC^2$$

statt findet, und man zieht aus den Theilpunkten a, α nach der gegenüberliegenden Ecke des Dreiecks die Geraden Aa, Aα, so sind die Winkel BAa und CAα einander gleich. —

Beweis.

Wäre Winkel BAa nicht gleich CAα, so könnte man eine Gerade Aa_1 so ziehen, daß $\angle BAa_1 = \angle CA\alpha$ würde. In Folge von Lehrs. I hätte man alsdann:

$$Ba_1.\,B\alpha : Ca_1.\,C\alpha = AB^2 : AC^2.$$ Aber p. h.

$$Ba.\,B\alpha : Ca.\,C\alpha = AB^2 : AC^2.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{Ba_1}{Ba} = \frac{Ca_1}{Ca}$$ mithin auch

$$Ba_1 : Ca_1 \pm Ba_1 = Ba : Ca \pm Ba$$ d. i.

$$Ba_1 : BC = Ba : BC$$ d. h.

$Ba_1 = Ba$, mithin fällt der Punkt a_1 mit dem Punkt a zusammen. —

Zusatz.

Fallen die Punkte a und α zusammen, so wird entweder der Winkel BAC oder sein Nebenwinkel halbirt. In beiden Fällen hat man

$$Ba^2 : Ca^2 = AB^2 : AC^2,$$ mithin ist auch

$$Ba : Ca = AB : AC$$ d. h.

Halbirt man den Winkel eines Dreiecks, oder auch dessen Nebenwinkel, und verlängert die Halbirungslinie, bis sie die gegenüberliegende Seite trifft, so verhalten sich die dadurch entstehenden Abschnitte dieser Seite, wie die anliegenden Seiten des Dreiecks.

Dieser bekannte Satz ist also ein spezieller Fall unseres allgemeinen Satzes.

Lehrsatz III.

Figur 3.

Beschreibt man um ein Dreieck ABC einen Kreis (Z), zieht durch die Endpunkte B, C einer Seite BC Tangenten an den Kreis, welche sich in D schneiden und zieht endlich die Gerade AD, welche der Seite BC in α begegnet, so verhalten sich die Abschnitte Bα, Cα dieser Seite, wie die Quadrate der anliegenden Dreiecksseiten, d. h., es ist

$$B\alpha : C\alpha = AB^2 : AC^2.$$

Beweis.

Man ziehe durch A mit BC die Parallele AA_1, welche dem Kreis zum zweitenmal in A_1 begegnet und verbinde den Punkt A_1 mit den Punkten B, C, D durch die Geraden A_1C, A_1B, A_1D: dann ist

$$\triangle ABC = \triangle A_1BC \text{ und } \angle CAE = \angle BA_1F.$$

Da ferner EF mit BC parallel, und D der Pol von BC ist, so schneiden sich in dem Vierecke AA_1FE die Diagonalen AF und A_1E in der Mitte a der Geraden BC. (Siehe meine Lehre von den Transversalen Lehrsatz LXX). —

Hieraus folgt

$$\angle BAa = \angle BA_1F = \angle EAC$$

mithin nach Lehrs. I. Zus. 1.

$$B\alpha : C\alpha = AB^2 : AC^2. —$$

Zusatz 1.

Zieht man noch durch A an den Kreis (Z) die Tangente $A\alpha_1$, welche der BC in α_1 begegnet, so ist $A\alpha_1$ die Polare des Punktes A (Siehe meine harmonischen Verhältnisse Seite 266); und da BC die Polare des Punktes D ist, so ist α_1 der Pol von AD (Harm. Vhn. A. 2. Lehrs. LXXIX), mithin die Punkte B, α, C, α_1 vier harmonische Punkte d. h. es ist

$$B\alpha : C\alpha = B\alpha_1 : C\alpha_1$$

und demnach auch

$$B\alpha_1 : C\alpha_1 = AB^2 : AC^2.$$

Eben so findet man

$$B\alpha : C\alpha = BE^2 : CE^2.$$
$$A\alpha : E\alpha = AB^2 : EB^2.$$
$$= AC^2 : EC^2 \text{ und}$$
$$AD : DE = AB^2 : EB^2$$
$$= AC^2 : EC^2. —$$

Zusatz 2

Bezeichnet man den Radius des Kreises (Z) mit R, so ist

$$A\alpha_1^2 = \alpha_1Z^2 - R^2$$
$$= \alpha_1a^2 + aZ^2 - R^2.$$
$$BD^2 = Ba^2 + aD^2 = R^2 - aZ^2 + aD^2$$

demnach

$$A\alpha_1^2 + BD^2 = \alpha_1a^2 + aD^2 = D\alpha_1^2.$$

Da ferner α_1 der Pol von AE, D der Pol von BC ist, so ist $D\alpha_1$

die Polare von α (Harm. Vhn. Lehrs. LXXIX), und die Gerade $Z\alpha$ steht senkrecht auf $D\alpha_1$. —

Endlich ist noch, weil a in der Mitte von BC liegt:

$\alpha_1 a. \ \alpha_1\alpha = \alpha_1 B. \ \alpha_1 C$ (Siehe harm. Vhn. 1. Abschnitt, Lehrs. IX), und da auch $\alpha_1 A^2 = \alpha_1 B. \ \alpha_1 C$, so ist

$\alpha_1 A^2 = \alpha_1 a. \ \alpha_1 \alpha$, d. h. die Tangente $\alpha_1 A$ die mittlere Proportionale zwischen den Segmenten $\alpha_1 a$ und $\alpha_1 \alpha$. —

Zusatz 3.

Da $\angle$ BAa $= \angle$ CAα, so folgt allgemein:

Ist ein Dreieck ABC einem Kreise einbeschrieben und man zieht durch die einzelnen Ecken desselben Tangenten an den Kreis, welche ein neues Dreieck DEF bilden, so machen die Verbindungslinien AD, BE, CF der entsprechenden Ecken mit den Seiten des Dreiecks ABC ganz dieselben Winkel, wie die aus den Ecken des Dreiecks ABC nach den Mitten ihrer gegenüberliegenden Seiten gezogenen Geraden. —

Da sich ferner die letzten Geraden in Einem Punkt (dem Schwerpunkt des Dreiecks) durchschneiden, so ist dasselbe mit den ersten drei Geraden der Fall, d. h. die Dreiecke ABC und DEF sind in collinearer Lage (Siehe harm. Vhn. A. 2. Lehrs. XXXIII.)

Zusatz 4.

Zieht man durch irgend einen Punkt M der AD mit AE, die Gerade MN parallel, welche die AB in L, die AC in N trifft, so ist ML = MN. (Harm Vhn. A. 1. Lehrs. XIII. Zus. 2.)

Dieser letzte Satz, der sich aus der Natur des harmonischen Strahlenbüschels ergibt, ist kürzlich besonders von Chasles mitgetheilt worden, und zwar mit der Bemerkung, daß derselbe für die Theorie der stereographischen Projektion von Wichtigkeit sei. Siehe Journal de mathematiques publié par Liouville Juillet 1842 p. 272. —

Lehrsatz IV.

Figur 4.

Beschreibt man um ein Dreieck ABC einen Kreis (Z) und zieht aus einer Ecke A durch den Mittelpunkt Z die Gerade AZ, welche der BC in a begegnet, und zugleich von A auf BC die Senkrechte Aα, so verhalten sich die Rechtecke aus den einzelnen von B und C bis zu den Theilpunkten A und α gehenden Abschnitten, wie die Quadrate der entsprechenden anliegenden Dreiecksseiten, d. h. es ist

$$Ba. \ B\alpha : \ Ca. \ C\alpha = AB^2 : \ AC^2.$$

Beweis.

Man verlängere Aa und Aα, bis sie dem Kreis zum zweitenmal in D und E begegnen, und ziehe DE, so ist wegen des Durchmessers AD, $\angle$ AED $= 90° = \angle$ Aαa, d. h. DE parallel mit BC, folglich

$$\text{arc. BD} = \text{arc. CE} \text{ und}$$
$$\angle \text{BAa} = \angle \text{CA}\alpha.$$

Demnach folgt die Richtigkeit unseres Satzes aus Lehrs. I. —

Zusatz.

Zieht man noch BD, so entsteht ein Dreieck ABD, welches dem Dreieck AαC ähnlich ist.

Aus dieser Aehnlichkeit folgt:

$$AB : AD = A\alpha : AC$$

mithin ist

$$AB.\ AC = AD.\ A\alpha \text{ d. h.}$$

das Rechteck aus je zwei Dreiecksseiten ist gleich dem Rechteck aus dem Durchmesser des umschriebenen Kreises und dem auf die dritte Seite gefällten Höhenperpendikel. —

Multiplicirt man die letzte Gleichung noch mit BC, so erhält man

$$AB.\ AC.\ BC = AD.\ A\alpha.\ BC.$$

Nun ist aber Aα. BC $= 2 \triangle$ ABC

demnach

$$AB.\ AC.\ BC = 2\ AD \triangle ABC.$$
$$= 4\ R \triangle ABC, \text{ d. h.}$$

das Produkt sämmtlicher Dreiecksseiten ist gleich dem Produkt aus dem doppelten Durchmesser des umschriebenen Kreises in den Flächeninhalt des Dreiecks.

Oder mit anderen Worten:

Das senkrechte Parallelepipedum aus den drei Seiten eines Dreiecks ist gleich einem senkrechten Prisma, dessen Grundfläche das gegebene Dreieck ist, und dessen Höhe dem doppelten Durchmesser des dem Dreieck umschriebenen Kreises gleich kommt.

Lehrsatz V.

Figur 5.

Wenn man in einem rechtwinkeligen Dreieck ABC den rechten Winkel A halbirt, und im Punkte a, wo die Halbirungslinie Aa die Hypothenuse trifft, ein Perpendikel aD auf diese errichtet, so schneidet dieses Perpendikel von den Katheten des Dreiecks gleiche Segmente ab, d. h. es ist BD = CE. —

Beweis.

Da der Winkel A halbirt ist, so hat man

$$AB : AC = Ba : Ca.$$

Ferner folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke

ABC und BaD

$$AB : AC = Ba : aD$$

Demnach ist

$$Ba : Ca = Ba : aD$$

folglich $Ca = aD$,

$$\triangle\ CaE = \triangle\ BaD$$

und $BD = CE$.

Zusatz.

Aus der Gleichheit der Dreiecke BaD und CaE folgt noch $Ba = aE$. Auch ist wegen des bei A und a rechtwinkeligen Vierecks ABaE

$$CA.\ CE = Ca.\ CB \text{ oder}$$

$$CA.\ BD = aD.\ BC$$

welche Ausdrücke zugleich den doppelten Inhalt des Dreiecks BCD bezeichnen. —

Lehrsatz VI.

Figur 6, a und b.

Zieht man aus zwei Ecken B, C eines Dreiecks ABC je zwei Geraden Bb, Bβ, Cc, Cγ, welche einzeln mit den beiden anliegenden Dreiecksseiten gleiche Winkel bilden, nämlich

$$\angle\ ABb = \angle\ CB\beta$$

$$\angle\ ACc = \angle\ BC\gamma,$$

und man verbindet die dritte Ecke A des Dreiecks mit den Durchschnitten O, Q, O_1, Q_1 dieser Geraden, so entstehen auch bei A zwei Paare gleicher Winkel, nämlich

$$\angle\ BAO = \angle\ CAQ$$

$$\angle\ BAO_1 = \angle\ CAQ_1.$$

Beweis.

Zufolge Lehrsatz I. ist:

$$Ab.\ A\beta : Cb.\ C\beta = AB^2 : BC^2$$

$$Bc.\ B\gamma : Ac.\ A\gamma = BC^2 : AC^2.$$

Hieraus folgt:

(I) $Ab.\ A\beta.\ Bc.\ B\gamma : Ac.\ A\gamma.\ Cb.\ C\beta = AB^2 : AC^2$

Da sich aber die Geraden Aa, Bb, Cc in einem Punkt O, und die Geraden Aα, Bβ, Cγ in Einem Punkt Q durchschneiden, so hat man, (siehe meine Lehre von den Transversalen Lehrs. III.):

$$Ab.\ Bc.\ Ca. = Ac.\ Ba.\ Cb \text{ und}$$
$$A\beta.\ B\gamma.\ C\alpha = A\gamma.\ B\alpha.\ C\beta,$$

mithin ist auch

(II) $Ab.\ A\beta.\ Bc.\ B\gamma : Ac.\ A\gamma.\ Cb.\ C\beta = Ba.\ B\alpha : Ca.\ C\alpha$

Aus (I) und (II) folgt

$$Ba.\ B\alpha : Ca.\ C\alpha = AB^2 : AC^2 \text{ d. h.}$$
$$\angle BAa = \angle CA\alpha, \text{ oder was dasselbe}$$
$$\angle BAO = \angle CAQ \text{ (siehe Lehrs. II.) —}$$

Ebenso wird gezeigt, daß die Winkel BAO_1 und CAQ_1 einander gleich sind. —

Zusatz 1.

Halbiren die Geraden Bb und Cc die Winkel B und C des Dreiecks ABC, oder auch deren Nebenwinkel, so fallen die Geraden Bb, Bβ und eben so die Geraden Cc, Cγ in eine Gerade zusammen. Da sich aber diese beiden Geraden nur in einem Punkte durchschneiden können, so fallen auch die Geraden Aa und Aα zusammen, d. h. die Gerade Aa halbirt den Winkel A des Dreiecks ABC.

Hieraus folgt:

1) Die drei Halbirungslinien der Winkel eines Dreiecks schneiden sich in Einem Punkt.
2) Von den sechs Geraden, welche einzeln die Winkel eines Dreiecks und deren Nebenwinkel halbiren, schneiden sich viermal drei in Einem Punkt. —

Zusatz 2.

Nach Lehrsatz I., Zusatz 2 ist:

$$Aa^2 : A\alpha^2 = Ba.\ Ca : B\alpha.\ C\alpha. \text{ Ebenso ist}$$
$$Bb^2 : B\beta^2 = Ab.\ Cb : A\beta.\ C\beta.$$
$$Cc^2 : C\gamma^2 = Ac.\ Bc : A\gamma.\ B\gamma.$$

Hieraus folgt:

$$Aa^2.\ Bb^2.\ Cc^2 : A\alpha^2.\ B\beta^2.\ C\gamma^2 = Ab.\ Bc.\ Ca \times Ac.\ Ba.\ Cb : A\beta.\ B\gamma.\ C\alpha \times A\gamma.\ B\alpha.\ C\beta.$$

Da aber

$$Ac.\ Ba.\ Cb = Ab.\ Bc.\ Ca \text{ und}$$
$$A\gamma.\ B\alpha.\ C\beta = A\beta.\ B\gamma.\ C\alpha$$

so ergibt sich:

$Aa. Bb. Cc : A\alpha. B\beta. C\gamma = Ab. Bc. Ca : A\beta. B\gamma. C\alpha$ d. h. zieht man aus den einzelnen Ecken eines Dreiecks je zwei Geraden, welche mit den umliegenden Seiten des Dreiecks beliebige, aber unter sich gleiche Winkel bilden und überdieß je drei und drei durch zwei Punkte O, Q (O_1, Q_1) gehen, so verhält sich das Produkt der drei ersten Geraden zum Produkt der drei anderen, wie das Produkt der drei getrennten Abschnitte, welche durch die ersten Geraden auf den Dreiecksseiten gebildet werden, sich zu dem Produkt derjenigen drei getrennten Abschnitte verhält, welche durch die drei anderen Geraden auf den Dreiecksseiten entstehen. —

Zusatz 3.

Bezeichnen wir nach dem Vorgange von Möbius das Verhältniß $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ durch (A, B, C, D) so ist (Harm. Vhn. A. 1 Lehrs. XXIV):

$$(A, c, \gamma, B) = (b, O, O_1, B) = (\beta, Q_1, Q, B) = (C, a, a_1, B)$$
$$= (C, \alpha_1, \alpha, B)$$

mithin schneiden sich die Geraden AC, ac, $a_1\gamma$ und eben so AC, $\alpha_1 c$, $\alpha\gamma$ in einem und demselben Punkt, oder was dasselbe: es liegt der Durchschnitt von ac und $a_1\gamma$ auf AC. Eben so liegt der Durchschnitt von $\alpha_1 c$ und $\alpha\gamma$ auf AC.

Bezeichnen wir diese Durchschnitte mit b_1, β_1, so sind (Harm. Verhältnisse Abschnitt I Lehrsatz XVI) sowohl die Punkte

A, b, C, b_1 als die Punkte

A, β, C, β_1

vier harmonische Punkte. Die Linie AC ist demnach nach zwei verschiedenen Verhältnissen harmonisch getheilt, und kann mithin als eine involutorische Grade betrachtet werden, in welcher A und C die Hauptpunkte sind. (Harm. Vhn. A. 1. Lehrs. XXXI und Lehrs. XXXV Zus. 2).

Dasselbe gilt von den beiden anderen Seiten AB, BC des Dreiecks, wenn man die Geraden

ab, $\alpha_1\beta$

$a_1 b$, $\alpha\beta$ ꝛc.

bis zu ihren entsprechenden Durchschnitten verlängert.

Lehrsatz VII.

Figur 7, a und b.

Halbirt man einen Dreieckswinkel A oder auch dessen Nebenwinkel durch die Gerade AD, welche der gegenüberliegenden Seite in D begeg-

net, so ist das Rechteck aus den beiden Dreiecksseiten, welche im Scheitel des halbirten Winkels zusammenstoßen, gleich dem Rechtecke aus den beiden Abschnitten der dritten Seite, plus oder minus dem Quadrat der Halbirungslinie, je nachdem der Winkel selbst oder sein Nebenwinkel halbirt wurde, d. h.

$$AB.\ AC = BD.\ CD \pm AD^2.$$

Beweis.

Man beschreibe um das Dreieck ABC einen Kreis, verlängere AD bis sie zum zweitenmal dem Kreis in E begegnet und ziehe CE, dann ist wegen Aehnlichkeit der Dreiecke BAD und AEC:

$$AB : AD = AE : AC, \text{ mithin}$$

$$AB.\ AC = AD.\ AE = AD\ (DE \pm AD)$$
$$= AD.\ DE \pm AD^2$$
$$= BD.\ CD \pm AD^2.$$

Lehrsatz VIII.

Figur 8, a und b.

Wenn die Halbirungslinien von zwei Winkeln eines Dreiecks oder auch ihrer Nebenwinkel einander gleich sind, so ist das Dreieck ein gleichschenkeliges.

Beweis.

Es ist

$$BC : AB = CE : AE \qquad (1)$$
$$BC : AC = BD : AD \qquad (2)$$
$$\pm BE^2 = AB.\ BC - AE.\ CE \quad (3)$$
$$\pm CD^2 = AC.\ BC - AD.\ BD \quad (4)$$

Da p. h. BE = CD, so folgt aus (3) und (4)

$$AC.\ BC - AD.\ BD = AB.\ BC - AE.\ CE \quad (5)$$

Nun ist aber

$$AC = AE \pm CE$$
$$AB = AD \pm BD$$

mithin, wenn wir diese Werthe in (5) substituiren:

$$BC.\ AE \pm BC.\ CE - AD.\ BD = BC.\ AD \pm BC.\ BD - AE.\ CE \ (6)$$

Nach (1) ist $BC.\ AE = CE\ (AD \pm BD)$

(2) $BC.\ AD = BD\ (AE \pm CE)$

Aus (6) wird demnach, wenn wir diese Ausdrücke substituiren, und die gleichen Glieder CE. BD auf beiden Seiten weglassen:

$CE. AD \pm BC. CE - AD. BD = BD. AE \pm BC. BD - AE. CE$
mithin

$$CE\,(AD \pm BC + AE) = BD\,(AD \pm BC + AE)$$

folglich $CE = BD$.

In den Dreiecken BEC und BDC sind daher alle Seiten gleich, mithin diese Dreiecke congruent und

$$\angle ECB = \angle DBC, \text{ mithin auch}$$
$$AB = AC.$$

Beweis 2.

Betrachtet man AC als Transversale des Dreiecks BOD, so ist (Trs. Lehrs. I):

$$OC.\ BE.\ AD = OE.\ AB.\ CD.$$

Da aber p. h. $BE = CD$, so ist auch

$$(1) \quad OC.\ AD = OE.\ AB.$$

Da nun AO den Winkel BAC halbirt, so ist

$$OC : OD = AC : AD \text{ mithin}$$
$$(2) \quad OC.\ AD = OD.\ AC.$$

Aus (1) und (2) folgt

$$OE.\ AB = OD.\ AC \text{ mithin}$$
$$AB : AC = OD : OE.$$

Wäre nun AB nicht gleich AC, sondern etwa größer, so hätte man auch $OD > OE$.

Aus $AB > AC$ folgt aber ferner:

$$\angle ACB > \angle ABC \text{ und daher auch}$$
$$\angle ACO > ABO.$$

Da ferner $\angle EOC = \angle DOB$, so ist umgekehrt:

$$\angle OEC < \angle ODB.$$

Da also $OD > OE$, $\angle ODB > \angle OEC$ ist, so muß offenbar die von O auf AB gefällte Senkrechte Op größer als das von O auf AC gefällte Perpendikel Oq sein.

Dies Resultat ist ungereimt, weil O auf der Halbirungslinie des Winkels ABC liegt. Unsere Voraussetzung ist demnach falsch, d. h. es kann nicht $AB > AC$ und eben so wenig $AC > AB$ sein. Es ist also $AB = AC$, wie zu beweisen war. —

Anmerkung.

Beweis 1 ist von Moosbrugger. Siehe Grunerts Archiv IV, pag. 330.

Lehrsatz IX.

Figur 9, a und b.

Zieht man aus einer Ecke A eines Dreiecks ABC zwei Gerade AD, AE so nach der Grundlinie, daß $\angle ADC = \angle BAC$, $\angle AEB = \angle BAC$, so finden folgende Beziehungen statt:

1) Jede der in A zusammenstoßenden Dreiecksseiten ist die mittlere Proportionale zwischen der dritten Seite BC des Dreiecks und demjenigen Abschnitte dieser Seite, welcher einerseits von der betreffenden Dreiecksseite, andererseits von einer der neu gezogenen Geraden AD, AE begrenzt wird, d. h.

$$AB^2 = BC \cdot BE$$
$$AC^2 = BC \cdot CD.$$

2) Die Abschnitte der dritten Seite BC verhalten sich zu einander, wie die Quadrate der an ihnen anliegenden Dreiecksseiten, d. h.

$$BE : CD = AB^2 : AC^2.$$

3) Jede der neu gezogenen Geraden AD, AE ist die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der dritten Seite, d. h.

$$AD^2 = AE^2 = BE \cdot CD.$$

4) Das Rechteck aus den beiden in A zusammen stoßenden Dreiecksseiten ist gleich dem Rechteck aus der dritten Seite BC und einer der neu gezogenen Geraden AD, AE, d. h.

$$AB \cdot AC = BC \cdot AD = BC \cdot AE.$$

5) Die Summe der Quadrate der in A zusammenstoßenden Dreiecksseiten ist gleich dem Quadrat der dritten Seite plus dem Rechteck über dieser Seite und dem Abstande der auf dieser Seite liegenden Theilpunkte, d. h.

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 + BC \cdot DE.$$

Beweis.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC, ABE, ACD folgt:

$$AB : AC : BC = BE : AE : AB = AD : CD : AC.$$

Aus dieser Proportion folgt:

$$(\mathrm{I})\left\{\begin{array}{l} AB^2 = BC \cdot BE \\ AC^2 = BC \cdot CD \end{array}\right\}$$

Aus (I) folgt:

$$(\mathrm{II})\ BE : CD = AB^2 : AC^2.$$

Aus der ursprünglichen Proportion folgt ferner:

$$AD \cdot AE = BE \cdot CD$$

oder da $$AD = AE.$$

$$(III)\ AD^2 = AE^2 = BE.\ CD.$$

Eben so folgt aus jener Proportion:

$$(IV)\ AB.\ AC = BC.\ AD = BC.\ AE.$$

Addirt man die Relationen (I), so erhält man

$$AB^2 + AC^2 = BC\ (BE + CD)$$

Nun ist aber $BE + CD = BC + DE$, mithin

$$AB^2 + AC^2 = BC\ (BC + DE) \text{ oder}$$

$$(V)\ AB^2 + AC^2 = BC^2 + BC.\ DE. —$$

Zusatz.

Ist das Dreieck in A rechtwinkelig, so fallen die Geraden AD, AE in eine einzige Gerade AA_1 zusammen, welche zugleich auf BC senkrecht steht. — Dieser Fall führt uns zu einem ganz bekannten Satze. Siehe Legendre III, 23.

Ist das Dreieck in C rechtwinkelig, so bildet eine der Geraden AD, AE (wir nehmen an AE) mit der Seite AB einen rechten Winkel. — Nach V ist aber

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 + BC.\ DE$$

oder da $$DE = 2CE$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 + 2BC.\ CE$$

Nun ist nach (I)

$$BC.\ CE = AC^2 \text{ folglich}$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 + 2AC^2$$

oder

$$AB^2 - AC^2 = BC^2.$$

Dies ist der Pythagorische Lehrsatz, der also nur eine Folgerung unseres allgemeinen Satzes ist.

Sind die in A zusammenstoßenden Seiten gleich, so werden die aus A gezogenen Geraden AD, AE einzeln den Abschnitten CD, BE der dritten Seite BC gleich. Ist das Dreieck über eine der in A zusammenstoßenden Seiten gleichschenkelig, d. h. AC = BC (oder auch AB = BC), so fällt jedesmal eine der neu gezogenen Geraden AD (AE) mit jener Seite AB (AC) zusammen.

Ist das Dreieck gleichschenkelig über AB und zugleich rechtwinkelig in C, so fällt eine der Geraden AD, AE mit AB zusammen, die andere steht senkrecht auf derselben. —

Ist das Dreieck gleichseitig, so fallen die Geraden AD und AE mit den Seiten AB und AC des Dreiecks zusammen. —

Zweiter Abschnitt.

Der umschriebene und die vier berührenden Kreise.

Lehrsatz X.

Figur 10.

Der dem Dreieck umschriebene Kreis geht durch die Mitten der Geraden, welche die Mittelpunkte der drei auswärts berührenden Kreise verbinden. —

Beweis.

Es sei S der Mittelpunkt des einbeschriebenen, S_1, S_2, S_3 die Mittelpunkte der drei auswärts berührenden Kreise, welche Mittelpunkte bekanntlich erhalten werden, indem man die innern und äußern Winkel des Dreiecks halbirt: (Siehe Lehrs. VI, Zus. 1) dann ist zu zeigen, daß D in der Mitte von $S_2\,S_3$ liegt.

Nun ist

$$\angle\, S_3\,BS_2 = S_3\,CS_2 = 90°,$$

mithin liegen die Punkte S_3, B, C, S_2 im Umfange eines Kreises, dessen Mittelpunkt der Durchschnitt von $S_2\,S_3$ und der auf der Mitte von BC errichteten Senkrechten ist. Dieser Durchschnitt ist aber kein anderer als der Punkt D, in welchem $S_2\;S_3$ den Kreis (Z) zum zweitenmal durchschneidet. Da nämlich E in der Mitte des Bogens BC liegt und $\angle\, DAE = 90°$, so ist ED die auf der Mitte von BC errichtete Senkrechte, mithin $DS_2 = DS_3$, wie zu beweisen war. —

Eben so wird gezeigt, daß der Kreis (Z) durch die Mitten der Geraden $S_1\,S_2$, $S_1\,S_3$ geht.

Zusatz.

Da die Geraden S_1A, S_2B, S_3C einzeln auf den Seiten S_2S_3, S_1S_3, S_1S_2 senkrecht stehen, so ist S der Durchschnittspunkt der Höhenperpendikel im Dreieck $S_1S_2S_3$. Daraus folgt:

In jedem Dreieck ist der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises zugleich der Durchschnitt der Höhenperpendikel für dasjenige Dreieck, welches zu Ecken die Mittelpunkte der drei auswärts berührenden Kreise hat.

Oder mit anderen Worten:

In jedem Dreieck ist der Durchschnittspunkt der Höhenperpendikel zugleich der Mittelpunkt des dem Höhendreieck einbeschriebenen Kreises.

Auch folgt:

Der dem Höhendreieck umschriebene Kreis geht zugleich durch die Mitten der Seiten des ursprünglichen Dreiecks.

Ferner;

Die Ecken eines Dreiecks sind zugleich die Mittelpunkte der das Höhendreieck auswärts berührenden Kreise.

Lehrsatz XI.

Figur 10.

Die Punkte, in welchen die Halbirungslinien der inneren Dreieckswinkel den umschriebenen Kreis durchschneiden, sind die Mittelpunkte dreier neuen Kreise, welche einzeln durch je zwei Ecken des Dreiecks, durch den Mittelpunkt des einbeschriebenen und den Mittelpunkt eines auswärts berührenden Kreises gehen.

Beweis.

Da $\angle SBS_1 = \angle SCS_1 = 90°$, so liegen die Punkte B, S, C, S_1 im Umfange eines Kreises, dessen Durchmesser SS_1 ist. Schneidet nun der Kreis (Z) die Gerade SS_1 im Punkte E, so bleibt zu zeigen, daß E in der Mitte von SS_1 liegt, oder daß $ES = ES_1$ ist. —

Nun ist

$$\angle SBE = \tfrac{1}{2} \text{ arc } (CE + CF)$$

$$\angle BSE = \tfrac{1}{2} \text{ arc } (BE + AF).$$

Aber $\quad \text{arc. } CE = \text{arc. } BE$

$\quad\quad\quad \text{arc. } CF = \text{arc. } AF$

folglich $\quad \angle SBE = \angle BSE$

mithin $\quad EB = ES.$

Da nun auch $EB = EC$, so geht der aus E mit EB beschriebene Kreis durch die Punkte B, S, C, folglich auch durch den in dem gleichen Kreisumfang liegenden Punkt S_1, d. h. es ist $ES = ES_1$. —

Ebenso wird gezeigt, daß die Punkte F, G einzeln in der Mitte von SS_2 und SS_3 liegen. —

Zusatz.

Nennen wir obere Theile der Höhenperpendikel diejenigen Strecken, welche von den Ecken eines Dreiecks bis zum Durchschnittspunkt der Höhenperpendikel gehen, so folgt, wenn wir $S_1S_2S_3$ als das unsprüngliche Dreieck, ABC als dessen Höhendreieck betrachten:

Der dem Höhendreieck umschriebene Kreis geht zugleich durch die Mitten der oberen Theile der Höhenperpendikel des ursprünglichen Dreiecks.

Lehrsatz XII.

Figur 10.

Die Geraden, welche die Mittelpunkte der vier berührenden Kreise eines Dreiecks verbinden, werden von je einer Ecke des Dreiecks und der dieser Ecke gegenüberliegenden Seite harmonisch getheilt. —

Beweis.

Da die Strahlen BS_2 und BS_3 auf einander senkrecht stehen, und überdieß einzeln mit BA und BC gleiche Winkel bilden, so sind die Strahlen

$$BS_3, BA, BS_2, BC$$

vier harmonische Strahlen (harm. Bhn. A. 1. Lehrs. XV.), mithin die Punkte

$$S_3, A, S_2, K$$

vier harmonische Punkte, (harm. Bhn. A. 1. Lehrs. XIII.) oder was dasselbe, die Gerade S_2S_3 ist in A und K harmonisch getheilt. —

Ebenso wird gezeigt, daß S_1S_2 und S_1S_3 harmonisch getheilt sind. —

Ferner sind wegen desselben Strahlenbüschels (BS_3, BC, BS, BA) auch die Punkte

$$S_1, a, S, A$$

harmonische Punkte, mithin ist auch SS_1 in A und a harmonisch getheilt.

Gleicherweise wird SS_2 durch B und AC, und SS_3 durch C und AB harmonisch getheilt.

Zusatz 1.

Die Seiten des Dreiecks ABC werden ebenfalls durch je zwei Verbindungslinien der Mittelpunkte seiner vier tangirenden Kreise und zwar durch je zwei auf einander stehende Verbindungslinien harmonisch getheilt.

Da nämlich AB, AS, AC, AS_2 vier harmonische Strahlen sind, so sind

$$B, a, C, K$$

vier harmonische Punkte, mithin

wird die Seite BC durch SS_1 und S_2S_3 harmonisch getheilt. —

Eben so wird gezeigt, daß AC durch SS_2 und S_1S_3, AB durch SS_3 und S_1S_2 harmonisch getheilt werden. —

Zusatz 2.

Da die Dreiecke ABC und $S_1S_2S_3$ zugleich collinear liegen, so sind die Durchschnittspunkte ihrer gegenüberliegenden Seiten in gerader Linie. (Harm. Vhn. A. 2. Lehrs. XXIII.)

Der Punkt S aber ist das Collineations-Centrum beider Dreiecke. Man hat daher noch folgenden Satz:

Der Durchschnittspunkt S der Höhenperpendikel eines Dreiecks ist der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises für das Höhendreieck und zugleich das gemeinsame Collineationscentrum für beide Dreiecke.

Lehrsatz XIII.

Figur 10.

Die Summe der Radien der drei auswärts berührenden Kreise ist gleich dem doppelten Durchmesser des umschriebenen Kreises, plus dem Radius des einbeschriebenen Kreises, d. h, wenn wir die Radien der auswärts berührenden Kreise mit r_1, r_2, r_3, den des einbeschriebenen mit r, und den des umschriebenen mit R bezeichnen:

$$r_1 + r_2 + r_3 = 4\,R + r.$$

Beweis.

Da D in der Mitte von S_2S_3 (Lehrs. X), E in der Mitte von SS_1 (Lehrs. XI) liegt, so ist

$$DH = \frac{S_2s_2 + S_3s_3}{2} = \frac{r_2 + r_3}{2}$$

$$EH = \frac{S_1s_1 - Ss}{2} = \frac{r_1 - r}{2}$$

Ferner $\quad DH + EH = DE = 2\,R.$

Hieraus folgt

$$2R = \frac{r_2 + r_3 + r_1 - r}{2}, \text{ mithin}$$

$$r_1 + r_2 + r_3 = 4\,R + r.$$

Zusatz.

Aus unserem Lehrsatze folgt

$$R = \frac{r_1 + r_2 + r_3 - r}{4}$$

mithin läßt sich der Radius des umschriebenen Kreises direkt aus den Radien der vier tangirenden Kreise bestimmen. —

Lehrsatz XIV.

Figur 10.

Das Produkt der Radien der vier tangirenden Kreise ist gleich dem Quadrat vom Flächeninhalt des Dreiecks, d. h.

$$r\, r_1\, r_2\, r_3 = (\triangle)^2. —$$

Beweis.

Da S_3, A, S_2, K vier harmonische Punkte sind (Lehrs. XII), und überdieß D in der Mitte von S_2S_3 liegt (Lehrs. X), so ist (Harm. Vhn. A. 1. Lehrs. IX)

$$KS_2 . KS_3 = AK . DK, \text{ mithin}$$
$$KS_2 : AK = DK : KS_3.$$

Nun ist aber

$$KS_2 : AK = S_2s_2 : AA_1 = r_2 : h_1$$
$$DK : KS_3 = DH : S_3s_3 = DH : r_3.$$

Hieraus folgt

$$r_2 : h_1 = DH : r_3, \text{ mithin}$$
$$\text{(I) } DH . h_1 = r_2r_3.$$

Ferner sind

$$S_1, a, S, A$$

vier harmonische Punkte (Lehrs. XII), und E liegt in der Mitte von SS_1 (Lehrs. XI). Demnach ist

$$aS . aS_1 = aA . aE, \text{ mithin}$$
$$aS : aA = aE : aS_1$$

Aber $aS : aA = Ss : AA_1 = r : h_1$

$$aE : aS_1 = EH : S_1s_1 = EH : r_1.$$

Hieraus folgt

$$r : h_1 = EH : r_1, \text{ mithin}$$
$$\text{(II) } EH . h_1 = rr_1.$$

Aus (I) und (II) ergibt sich ferner:

$$DH . EH\, h_1^2 = r\, r_1\, r_2\, r_3. —$$

Aber $DH . EH = BH^2$ und

$$BH . h_1 = \triangle, \text{ mithin}$$
$$rr_1r_2r_3 = (\triangle)^2. —$$

Lehrsatz XV.

Figur 10.

Die Summe der Rechtecke aus je zwei Radien der vier tangirenden Kreise ist gleich der Summe der Rechtecke aus je zwei Seiten des Dreiecks d. h. wenn wir die Seiten des Dreiecks einzeln mit a, b, c bezeichnen:

$$rr_1 + rr_2 + rr_3 + r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = ab + ac + bc.$$

Beweis.

Nach dem Beweise zu Lehrsatz XIV ist:

$$EH.\ h_1 = rr_1$$
$$DH.\ h_1 = r_2r_3.$$

Ferner ist $DH + EH = DE = 2R$, mithin

$$rr_1 + r_2r_3 = 2R.\ h_1.$$

Aber $2R.\ h_1 = AB.\ AC = bc.$ (Lehrs. IV, Zusatz).

Demnach ist

$$rr_1 + r_2r_3 = bc.$$ Eben so
$$rr_2 + r_1r_3 = ac.$$
$$rr_3 + r_1r_2 = ab.$$

Hieraus folgt:

$$rr_1 + rr_2 + rr_3 + r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = ab + ac + bc.$$

Zusatz 1.

Da $\angle ABS = \angle CBS = \angle CS_1S$ und
$\angle BAS = \angle CAS$,

so sind die Dreiecke ABS und AS_1C einander ähnlich.

Aus dieser Ähnlichkeit folgt:

$$AB : AS = AS_1 : AC,$$ mithin
$$AS.\ AS_1 = AB.\ BC = bc.$$ Eben so
$$BS.\ BS_2 = AB.\ BC = ac$$
$$CS.\ CS_3 = AC.\ BC = ab,$$ demnach

$$AS.\ AS_1 + BS.\ BS_2 + CS.\ CS_3 = ab + ac + bc$$
$$= rr_1 + rr_2 + rr_3 + r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3$$ d. h.:

Die Summe der Rechtecke aus je zwei Abständen der einzelnen Ecken des Dreiecks von den Mittelpunkten derjenigen beiden tangirenden Kreise, welche in den entsprechenden Winkeln des Dreiecks liegen, ist gleich der Summe der Rechtecke aus je zwei Seiten des Dreiecks, oder gleich der Summe der Rechtecke aus je zwei Radien seiner vier tangirenden Kreise.

Da S zugleich der Durchschnitt der Höhenperpendikel im Dreieck $S_1S_2S_3$, ABC dessen Höhendreieck ist, so folgt zugleich:

In jedem Dreiecke ist die Summe der Rechtecke aus den einzelnen Höhenperpendikeln in ihre unteren Theile gleich der Summe der Rechtecke aus je zwei Seiten des Höhendreiecks oder gleich der Summe der Rechtecke aus je zwei Senkrechten, welche aus dem Durchschnittspunkt der Höhenperpendikel und aus den Ecken des Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten des Höhendreieks gefällt sind.

Oder einfach:

In jedem Dreieck ist das Rechteck aus dem ganzen Höhenperpendikel in seinem unteren Theil gleich dem Rechteck aus den in seinem Fußpunkt zusammenstoßenden Seiten des Höhendreiecks. —

Da ferner die Dreiecke ABa und AEC ähnlich sind, so ist auch noch

$$AB.\ AC = Aa.\ AE.$$

Demnach

$$Aa.\ AE = bc = rr_1 + r_2\, r_3.\ \text{Eben so}$$
$$Bb.\ BF = rr_2 + r_1\, r_3 = ac,$$
$$Cc.\ CG = rr_3 + r_1\, r_2 = ab.$$

Zusatz 2.

Da $ASBS_3$ ein Viereck im Kreise ist, so ist $\angle\, ASS_2 = \angle\, AS_3B$, mithin sind die Dreiecke ASS_2 und AS_3S_1 einander ähnlich. —

Aus dieser Aehnlichkeit folgt:

$$AS : AS_2 = AS_3 : AS_1,\ \text{mithin}$$
$$AS.\ AS_1 = AS_2.\ AS_3,\ \text{also mit Berücksichtigung von Zus. 1:}$$
$$AS.\ AS_1 = AS_2.\ AS_3 = bc.\ \text{Eben so}$$
$$BS.\ BS_2 = BS_3.\ BS_1 = ac.$$
$$CS.\ CS_3 = CS_1.\ CS_2 = ab.$$

Hieraus folgt:

$$AS.\ BS.\ CS \times AS_1.\ BS_2.\ CS_3 = AS_2.\ BS_3.\ CS_1 \times AS_3.\ BS_1.\ CS_2 = (abc)^2$$

oder da $AS_3.\ BS_1.\ CS_2 = AS_2.\ BS_3.\ CS_1$ (Harm. Bhn. A. 2. Lehrs III) auch

$$AS.\ BS.\ CS \times AS_1.\ BS_2.\ CS_3 = (AS_2.\ BS_3.\ CS_1)^2 = (abc)^2,\ \text{mithin}$$
$$AS.\ BS.\ CS : abc = abc : AS_1.\ BS_2.\ CS_3.$$
$$AS_2.\ BS_3.\ CS_1 = abc.\ \text{d. h.}$$

1) Das Produkt der Seiten eines Dreiecks ist die mittlere Proportionalgröße zwischen dem Produkt der einzelnen Abstände der Ecken vom Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises und dem Produkt

der Abstände derselben Ecken von den diesen Ecken gegenüberliegenden Mittelpunkten der auswärts berührenden Kreise.

2) Das Produkt der Seiten des Höhendreiecks ist die mittlere Proportionalgröße zwischen dem Produkt der ganzen Höhenperpendikel und dem Produkt der unteren Theile derselben.

3) Das Produkt der Seiten des Höhendreiecks ist gleich dem Produkt dreier nicht an einander liegender Abschnitte der Seiten des ursprünglichen Dreiecks, diese Abschnitte von den Ecken des Dreiecks bis zu den Fußpunkten der Höhenperpendikel gerechnet. —

Lehrsatz XVI.

Figur 10.

Der reziproke Werth vom Radius des einbeschriebenen Kreises ist gleich der Summe der reziproken Werthe der drei Höhenperpendikel des Dreiecks, d. h., wenn man die einzelnen Höhenperpendikel mit h_1, h_2, h_3 bezeichnet:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}.$$

Beweis.

Es ist

$$\triangle BSC : \triangle ABC = Ss : AA_1$$
$$= r : h_1, \text{ mithin}$$

$$\frac{\triangle BSC}{\triangle ABC} = \frac{r}{h_1} \text{ Eben so}$$

$$\frac{\triangle ASC}{\triangle ABC} = \frac{r}{h_2}$$

$$\frac{\triangle ASB}{\triangle ABC} = \frac{r}{h_3} \text{ mithin, wenn man addirt:}$$

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ABC} = r\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right)$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}.$$

Lehrsatz XVII.

Der reziproke Werth vom Radius des einbeschriebenen Kreises ist gleich der Summe der reziproken Werthe der Radien der drei auswärts berührenden Kreise, d. h.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

Beweis.

Nach dem Beweise zu Lehrs. XIV ist

$$DH.\ h_1 = r_2 r_3 \text{ und}$$

$$DH = \frac{r_2 + r_3}{2}$$

Hieraus folgt

$$h_1 = \frac{2 r_2\ r_3}{r_2 + r_3} \text{ und}$$

$$\frac{1}{h_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right) \quad \text{Eben so}$$

$$\frac{1}{h_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3}\right)$$

$$\frac{1}{h_3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

Die Addition dieser drei Relationen ergibt:

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

Nach Lehrsatz XVI ist aber

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r},$$

mithin ist auch

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}.$$

Zusatz 1.

Aus diesem Satze folgt:

$$r_1 r_2 r_3 = r\ (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)$$

Nun ist aber nach Lehrsatz XIV

$$r_1 r_2 r_3 = \frac{(\triangle)^2}{r}$$

ferner ist, wenn man den halben Umfang des Dreiecks mit s bezeichnet,

$$\triangle = r\ s,$$

mithin auch, wenn man diesen Werth substituirt:

$$r_1 r_2 r_3 = r(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) = s.(\Delta).$$

d. h.: „Das senkrechte Parallelepiped aus den drei Halbmessern der außerhalb berührenden Kreise ist gleich einem senkrechten Prisma, dessen Grundfläche entweder die Summe der drei Rechtecke aus je zweien dieser Halbmesser, oder das vorgegebene Dreieck selbst ist, und dessen Höhe im ersten Fall der Halbmesser des einbeschriebenen Kreises, hingegen im zweiten der halbe Umfang des Dreiecks ist.“ (Siehe Feuerbachs analytisch-trigonometrische Abhandlung über die Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks §. 4).

Zusatz 2.

Addirt man die im Beweise unseres Lehrsatzes gefundenen Werthe von

$\frac{1}{h_2}$ und $\frac{1}{h_3}$, so ergibt sich

$$\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2}\right)$$

Aber

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right) = \frac{1}{h_1}$$

Demnach hat man:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{h_1} = \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}.$$ Eben so

$$\frac{1}{r_2} + \frac{1}{h_2} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_3}$$

$$\frac{1}{r_3} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}$$

d. h. die Summe der reziproken Werthe je eines Höhenperpendikels und des Radius von demjenigen auswärts berührenden Kreise, welcher in demselben Winkel des Dreiecks, wie jenes Höhenperpendikel liegt, ist gleich der Summe der reziproken Werthe der beiden anderen Höhenperpendikel.

Zusatz 3.

Nach dem Beweise zu Lehrs. XIV ist

$$EH.\, h_1 = rr_1$$

Aber

$$EH = \frac{r_1 - r}{2}$$ mithin

$$h_1 = \frac{2rr_1}{r_1 - r}.$$ Eben so hat man

$$h_2 = \frac{2rr_2}{r_2 - r}$$

$$h_3 = \frac{2rr_3}{r_3 - r}$$

Hieraus folgt ferner

$$\frac{1}{h_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$\frac{1}{h_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\frac{1}{h_3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_3}\right).$$

Hieraus folgt wieder

$$2\left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) = \frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}$$

oder, versetzt:

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} = 2\left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right)$$

Eben so

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r_2} = 2\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_3}\right)$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r_3} = 2\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right)$$

d. h.: die Summe der reziproken Werthe zweier dieselbe Dreiecksseite direkt (nicht ihre Verlängerung) berührender Kreise ist gleich der doppelten Summe der reziproken Werthe derjenigen beiden Höhenperpendikel, welche zu den beiden anderen Seiten des Dreiecks gehören. —

Lehrsatz XVIII.

Figur 10.

Bezeichnet man den halben Umfang des Dreiecks mit s, so finden folgende Beziehungen zwischen den Radien der vier tangirenden Kreise und dem Inhalt und Umfang des Dreiecks Statt:

$$r = \frac{\Delta}{s}$$

$$r_1 = \frac{\Delta}{s - a}$$

$$r_2 = \frac{\Delta}{s - b}$$

$$r_3 = \frac{\Delta}{s - c}$$

Beweis 1.

Aus $\triangle = rs$ folgt

$$r = \frac{\triangle}{s}$$

Ferner ist

$$ar_1 = 2 \triangle BS_1C$$
$$br_1 = 2 \triangle AS_1C$$
$$cr_1 = 2 \triangle AS_1B, \text{ demnach}$$
$$(-a + b + c)\, r_1 = 2 \triangle ABC, \text{ also}$$
$$r_1 = \frac{\triangle}{s-a}. \quad \text{Eben so}$$
$$r_2 = \frac{\triangle}{s-b}.$$
$$r_3 = \frac{\triangle}{s-c}. \text{ —}$$

Beweis 2.

Aus Lehrs. XVII, Zusatz 2 folgt:

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$$

Aber

$$\frac{1}{h_1} = \frac{a}{2\triangle}$$
$$\frac{1}{h_2} = \frac{b}{2\triangle}$$
$$\frac{1}{h_3} = \frac{c}{2\triangle}$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{r_1} = \frac{-a+b+c}{2\triangle} \quad \text{mithin}$$
$$r_1 = \frac{\triangle}{s-a}.$$

Zusatz.

Nach Lehrsatz XIV ist

$$r\, r_1\, r_2\, r_3 = (\triangle)^2.$$

Substituirt man nun für r, r_1, r_2, r_3 die in unserm Lehrsatz gefundenen Werthe, so erhält man:

$$\frac{(\triangle)^4}{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} = (\triangle)^2$$

Hieraus folgt

$$\triangle = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}.$$

Dies ist die bekannte Formel, welche den Inhalt des Dreiecks aus den einzelnen Seiten bestimmt. —

Auch folgt noch aus dieser Formel

$$(s-a)\,(s-b)\,(s-c) = \frac{(\triangle)^2}{s} = \frac{r^2s^2}{s} = r^2s \text{ d. h.}$$

Das Produkt aus den drei Faktoren, welche man erhält, wenn man vom halben Umfang des Dreiecks jede Seite abzieht, ist gleich dem Produkt aus dem halben Umfang des Dreiecks in das Quadrat vom Radius des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises. —

Lehrsatz XIX.

Die Summe der Rechtecke aus je zwei Radien der auswärts berührenden Kreise ist gleich dem Quadrat vom halben Umfang des Dreiecks, d. h.

$$r_1\,r_2 + r_1\,r_3 + r_2\,r_3 = s^2.$$

Beweis.

Nach Lehrs. XVII, Zus. 1. ist

$$r\,(r_1\,r_2 + r_1\,r_3 + r_2\,r_3) = s\,(\triangle).$$

Da aber $(\triangle) = rs$, so ergibt sich

$$r_1\,r_2 + r_1\,r_3 + r_2\,r_3 = s^2. \text{ —}$$

Zusatz 1.

Da $(s-a)\,r_1 = (\triangle)$

und $(\triangle)^2 = r\,r_1\,r_2\,r_3$, so ist

$$(s-a)^2 = \frac{r\,r_2\,r_3}{r_1}$$

Nun ist aber

$$r_1\,r_2\,r_3 = r\,(r_1\,r_2 + r_1\,r_3 + r_2\,r_3)$$

mithin $\quad rr_2\,r_3 = r_1\,(r_2\,r_3 - rr_2 - rr_3)$

folglich $\quad \frac{rr_2\,r_3}{r_1} = r_2\,r_3 - r\,(r_2 + r_3)$

demnach $\quad (s-a)^2 = r_2\,r_3 - r\,(r_2 + r_3)$. Eben so

$$(s-b)^2 = r_1\,r_3 - r\,(r_1 + r_3).$$

$$(s-c)^2 = r_1\,r_2 - r\,(r_1 + r_2).$$

Zusatz 2.

Da

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = (r_1 + r_2 + r_3)^2 - 2\,(r_1\,r_2 + r_1\,r_3 + r_2\,r_3)$$

$$\text{und } r_1 + r_2 + r_3 = 4\,R + r \text{ (Lehrs. XIII)}$$

so ist $\qquad r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = (4\,R + r)^2 - 2\,s^2$

d. h.: Die Summe der Quadrate der Radien der auswärts tangirenden Kreise ist gleich dem Quadrat von der Summe aus dem doppelten Durchmesser des umschriebenen und dem Halbmesser des einbeschriebenen Kreises, weniger dem halben Quadrat vom Umfange des Dreiecks.

Da ferner

$$2\,(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) = 2s^2 = \tfrac{1}{2}\,(a + b + c)^2$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(a^2 + b^2 + c^2) + ab + ac + bc$$

und nach Lehrsatz XV

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 + r\,(r_1 + r_2 + r_3) = ab + ac + bc$$

so erhält man durch Subtraction:

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 - r\,(r_1 + r_2 + r_3) = \tfrac{1}{2}\,(a^2 + b^2 + c^2)$$

d. h.: Die Summe der Rechtecke aus je zwei Radien der auswärts berührenden Kreise, weniger dem Rechteck aus der Summe dieser Radien in den Radius des einbeschriebenen Kreises ist gleich der halben Summe der Quadrate der Seiten des Dreiecks. —

Lehrsatz XX.

Figur 10.

Die Summe der oberen Theile der Höhenperpendikel eines Dreiecks ist gleich der Summe aus dem Durchmesser des umschriebenen und dem Durchmesser des einbeschriebenen Kreises, d. h.:

$$AO + BO + CO = 2\,(R + r).$$

Beweis.

Man ziehe CZ, welche den Kreis in J trifft, so ist wegen des Durchmessers CJ

$$\angle JBC = \angle JAC = 90°.$$

Hieraus folgt
$$JB \parallel AO$$
$$JA \parallel BO$$

mithin

$$AO = BJ = 2\,ZH = DH - EH.$$

Aber

$$DH = \frac{r_2 + r_3}{2}$$

$$EH = \frac{r_1 - r}{2} \text{ mithin}$$

$$AO = \frac{r + r_2 + r_3 - r_1}{2} \quad \text{Eben so}$$

$$BO = \frac{r + r_1 + r_3 - r_2}{2}$$

$$CO = \frac{r + r_1 + r_2 - r_3}{2}$$

Hieraus folgt:

$$AO + BO + CO = r + \tfrac{1}{2}(r + r_1 + r_2 + r_3)$$

Aber $r_1 + r_2 + r_3 = 4R + r$ (Lehrs. XIII.)

mithin $AO + BO + CO = 2(R + r)$.

Zusatz 1.

Aus $AO = 2\,ZM = DH - EH$ folgt:

1) Der obere Theil des irgend einer Dreiecksseite zugehörigen Höhenperpendikels ist doppelt so groß als der Abstand des Mittelpunktes des umschriebenen Kreises von derselben Dreiecksseite.

2) Der obere Theil des Höhenperpendikels ist gleich dem Unterschied derjenigen beiden Pfeile, welche derselben Seite des Dreiecks angehören, auf welcher das betreffende Höhenperpendikel senkrecht steht.

Zusatz 2.

Da $A_1O = h_1 - AO$, so erhält man

$$A_1O = EH - (DH - h_1)$$
$$= EH - DR.$$

Zusatz 3.

Da CJ ein Durchmesser, so hat man

$$BJ^2 + BC^2 = 4R^2$$

oder da $BJ = AO$, (Lehrs. XX.)

$$AO^2 + BC^2 = 4R^2.$$ Eben so

$$BO^2 + AC^2 = 4R^2$$

$$CO^2 + AB^2 = 4R^2$$

d. h.: Die Summe der Quadrate irgend einer Dreiecksseite und des oberen Theils von dem zu dieser Seite gehörigen Höhenperpendikel ist gleich dem Quadrat vom Durchmesser des dem Dreieck umschriebenen Kreises.

Lehrsatz XXI.

Figur 10.

Die Abstände von den Ecken des Dreiecks bis zu den Berührungspunkten ihrer gegenüberliegenden auswärts berührenden Kreise sind einander, und dem halben Umfang des Dreiecks gleich; die Abstände von den Ecken bis zu den Berührungspunkten des einbeschriebenen Kreises sind einzeln gleich der Differenz vom halben Umfang des Dreiecks und der jeder Ecke gegenüberliegenden Seite, d. h.

$$AL = Bs_2 = Cs_3 = s$$
$$AM = s - a$$
$$Bs = s - b$$
$$CM = s - c$$

Beweis.

$$AL = AC + CL = AC + Cs_1$$
$$AL_1 = AB + BL_1 = AB + Bs_1$$

ferner $Cs_1 + Bs_1 = BC$, mithin

$$AL + AL_1 = AB + AC + BC$$ und da

$$AL_1 = AL$$

$$AL = \frac{AB + AC + BC}{2}$$ d. h.

$AL = s$. Eben so ist

$Bs_2 = Cs_3 = s$.

Ferner ist

$HB = HC$ und da E in der Mitte von SS_1 liegt,

auch $Hs_1 = Hs$. Hieraus folgt

$HB - Hs_1 = HC - Hs$, d. i.

$$Bs_1 = Cs$$ und

$$Cs_1 = Bs.$$

Da nun $AL = s$ und

$ML = CM + CL = Cs + Cs_1 = Cs + Bs = a$ ist,

so folgt $AM = s - a$. Eben so ist

$$Bs = s - b.$$
$$Cs = s - c.$$

Zusatz.

Da

$$Bs_2 = s$$

$Bs_3 = s - a$ ist, so folgt

$$s_2s_3 = 2s - a = b + c$$

Ferner ist

$$ss_1 = Bs - Bs_1$$
$$= (s - b) - (s - c)$$
$$= c - b.$$
$$ss_2 = Cs + Cs_2$$
$$= (s - c) + (s - a) = 2\,s - (a + c) = b$$
$$ss_3 = Bs + Bs_3$$
$$= (s - b) + (s - a) = 2\,s - (a + b) = c.$$

Lehrsatz XXII.

Figur 10.

Der Radius des dem Dreieck $S_1S_2S_3$, dessen Ecken die Mittelpunkte der auswärts berührenden Kreise sind, umschriebenen Kreises ist doppelt so groß, als der Radius des dem ursprünglichen Dreieck umschriebenen Kreises. Der Mittelpunkt V jenes Kreises liegt auf der Geraden SZ, welche die Mittelpunkte des ein und umschriebenen Kreises verbindet und zwar in gleichem Abstande vom Punkt Z, wie der Punkt S.

Beweis.

Da D in der Mitte von S_2S_3 liegt, (Lehrs. X) und S_1S der obere Theil des Höhenperpendikels S_1A im Dreieck $S_1S_2S_3$ ist, so hat man nach Lehrs. XX, Zus. 1

$$VD = \tfrac{1}{2}\,SS_1 = ES_1.$$

Zugleich ist VD parallel ES_1, indem beide auf S_2S_3 senkrecht stehen, mithin die Figur $VDES_1$ ein Parallelogram und

$$VS_1 = DE = 2\,R.$$

Ferner ist
$$VD = ES$$
$$DZ = EZ$$
$$\angle\, VDZ = \angle\, ZES$$

mithin die Dreiecke VZD und EZS einander ähnlich, also auch

$$\angle\, VZD = \angle\, SZE$$

d. h. die Punkte V, Z, S sind in gerader Linie und es ist

$$VZ = SZ.$$

Zusatz 1.

Da ABC das Höhendreieck für das Dreieck $S_1S_2S_3$ ist, so folgt:

1) Der Mittelpunkt des dem Höhendreieck umschriebenen Kreises liegt in der Mitte zwischen dem Durchschnittspunkt der Höhenperpendikel und dem Mittelpunkt des umschriebenen Kreises. —

2) Der Radius des dem Höhendreieck umschriebenen Kreises ist die Hälfte vom Radius des dem ursprünglichen Dreieck umschriebenen Kreises.
3) Der dem Höhendreieck umschriebene Kreis geht durch die Mitten der Seiten des ursprünglichen Dreiecks (s. Lehrs. X), und durch die Mitten der oberen Theile der Höhenperpendikel (Lehrs. XI).
Endlich, da VS_1 parallel DE, mithin senkrecht auf BC ist:
4) Die aus dem Mittelpunkt des umschriebenen Kreises nach den Ecken des Dreiecks gezogenen Geraden stehen einzeln senkrecht auf den Seiten des Höhendreiecks.

Zusatz 2.

Bezeichnet man den Schwerpunkt des Dreiecks $S_1S_2S_3$ mit W, so ist bekanntlich

$$DW : S_1W = 1 : 2. \text{ Aber auch}$$
$$DV : SS_1 = 1 : 2.$$

Ueberdieß $\angle VDW = \angle WS_1S$

mithin die Dreiecke VDW und SWS_1 einander ähnlich, folglich

$$\angle VWD = \angle SWS_1 \text{ und}$$
$$VW = \tfrac{1}{2} WS, \text{ d. h.}$$

1) Der Schwerpunkt eines Dreiecks liegt in gerader Linie mit dem Durchschnittspunkt der Höhenperpendikel, dem Mittelpunkt des umschriebenen und dem Mittelpunkt des dem Höhendreieck umschriebenen Kreises, und zwar doppelt so weit vom Durchschnittspunkt der Höhenperpendikel entfernt, als vom Mittelpunkt des umschriebenen Kreises.

Da ferner

$$VW = \tfrac{1}{3} VS$$
$$ZW = \tfrac{1}{6} VS$$
$$VS = 2\, SZ \text{ ist}$$

so folgt

$$VW : ZW = VS : SZ, \text{ d. h.}$$

2) Die Punkte V, W, Z, S sind vier harmonische Punkte. —

Lehrsatz XXIII.

Figur 10.

Der Inhalt des Dreiecks $S_1S_2S_3$, dessen Ecken die Mittelpunkte der auswärts berührenden Kreise sind, ist gleich dem Rechteck aus dem Durchmesser des dem ursprünglichen Dreieck umschriebenen Kreises in den halben Umfang dieses Dreiecks, d. h.

$$\triangle S_1 S_2 S_3 = 2\, R\, s.$$

Beweis.

Da AS_1 senkrecht auf DS_2, AL senkrecht auf VS_2 steht (Lehrs. XXII Zusatz 4), so sind die Dreiecke $A\ S_1\ L$ und $V\ S_2\ D$ einander ähnlich. Aus dieser Aehnlichkeit folgt:

$$AS_1 : AL = VS_2 : DS_2 \text{ d. h.}$$
$$AS_1 : s = 2\,R : DS_2 \text{ (Lehrs. XXI u. XXII)}$$

mithin

$$AS_1 \cdot DS_2 = 2\,R\,s.$$

Nun ist aber

$$\triangle\ S_1\ S_2\ S_3 = \tfrac{1}{2}\ S_2\ S_3.\ AS_1 = DS_2.\ AS_1$$

mithin

$$\triangle\ S_1\ S_2\ S_3 = 2\,R\,s.$$

Zusatz.

Da $\triangle\ ABC = rs$, so hat man

$$\triangle\ S_1S_2S_3 : \triangle\ ABC = 2R : r \text{ d. h.}.$$

Das Dreieck $S_1S_2S_3$, dessen Ecken die Mittelpunkte der auswärts berührenden Kreise sind, verhält sich zum ursprünglichen Dreieck, wie der Radius des dem ersten umschriebenen zum Radius des dem zweiten einbeschriebenen Kreises. —

Oder auch:

Der Inhalt des ursprünglichen Dreiecks verhält sich zum Inhalt des Höhendreiecks, wie der Radius des dem ersten umschriebenen zum Radius des dem zweiten einbeschriebenen Kreises.

Lehrsatz XXIV.

Figur 10.

Das Produkt aus den Abständen der Mittelpunkte der auswärts tangirenden Kreise ist gleich dem Produkt aus dem Quadrat vom doppelten Durchmesser des umschriebenen Kreises in den halben Umfang des Dreiecks, d. h.:

$$S_1\ S_2.\ S_1\ S_3.\ S_2\ S_3 = 16\ R^2\ s$$

Beweis.

Nach Lehrs. IV Zus. und Lehrs. XXII ist

$$S_1S_2\ .\ S_1S_3\ .\ S_2S_3 = 8\ R \triangle\ S_1\ S_2\ S_3$$

Aber $\triangle\ S_1\ S_2\ S_3 = 2\ R\ s$ (Lehrs. XXIII), daher

$$S_1S_2\ .\ S_1S_3\ .\ S_2S_3 = 16\ R^2\ s.$$

Zusatz.

Da

$$AB.\,AC.\,BC = 4\,R\,\triangle\,ABC = 4Rrs, \text{ so ist}$$

$$S_1S_2.\,S_1S_3.\,S_2S_3 : AB.\,AC.\,BC = 4\,R : r$$

d. h.: Das Produkt aus den Abständen der Mittelpunkte der auswärts tangirenden Kreise verhält sich zum Produkt aus den drei Seiten des Dreiecks, wie der doppelte Durchmesser des umschriebenen zum Radius des einbeschriebenen Kreises. —

Oder:

Das Produkt sämmtlicher Seiten eines Dreiecks verhält sich zum Produkt der Seiten des Höhendreiecks, wie der doppelte Durchmesser des dem Höhendreieck umschriebenen zum Radius seines einbeschriebenen Kreises.

Lehrsatz XXV.

Figur 10.

Das Produkt aus den Abständen des Mittelpunkts des einbeschriebenen Kreises von den Mittelpunkten der auswärts berührenden Kreise ist gleich dem Quadrat vom doppelten Durchmesser des umschriebenen in den Radius des einbeschriebenen Kreises, d. h.:

$$SS_1.\,SS_2.\,SS_3 = 16\,R^2r.$$

Beweis.

Es ist nach Lehrs. XI und dem Beweis zu Lehrs. XIII:

$$ES^2 = EB^2 = EH.\,DE. = \left(\frac{r_1 - r}{2}\right) 2\,R$$
$$= R(r_1 - r)$$

mithin

$$\left.\begin{aligned} SS_1^2 &= 4\,R\,(r_1 - r). \text{ Eben so} \\ SS_2^2 &= 4\,R\,(r_2 - r) \\ SS_3^2 &= 4\,R\,(r_3 - r) \end{aligned}\right\}\ (I)$$

Hieraus folgt

$$SS_1^2.\,SS_2^2.\,SS_3^2 = 64\,R^3\,(r_1 - r)\,(r_2 - r)\,(r_3 - r)\ (II)$$

Aber

$$(r_1 - r)\,(r_2 - r)\,(r_3 - r) = r_1r_2r_3 - r\,(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)$$
$$+ r^2\,(r_1 + r_2 + r_3) - r^3.$$

Nun ist aber nach Lehrs. XVII, Zus. 1

$$r_1\,r_2\,r_3 = r\,(r_1\,r_2 + r_1\,r_3 + r_2\,r_3)$$

und nach Lehrs. XIII

$$r_1 + r_2 + r_3 = 4R + r$$

Die Substitution dieser Werthe in (II) ergibt

$$(r_1 - r)(r_2 - r)(r_3 - r) = 4Rr^2$$

mithin $$SS_1 . SS_2 . SS_3 = 16 R^2 r.$$

Zusatz 1.

Nach Lehrs. XXIV ist

$$S_1S_2 . S_1S_3 . S_2S_3 = 16 R^2 s.$$

Hieraus folgt in Verbindung mit unserem Lehrsatz

$$SS_1 . SS_2 . SS_3 . S_1S_2 . S_1S_3 . S_2S_3 = 256R^4rs$$
$$= (4R)^4 \Delta.$$

d. h.: Das Produkt aus den sechs Abständen der Mittelpunkte der vier tangirenden Kreise ist gleich dem Produkt aus der vierten Potenz vom doppelten Durchmesser des umschriebenen Kreises in den Inhalt des Dreiecks. —

Auch folgt noch:

$$SS_1.SS_2.SS_3 : S_1S_2.S_1S_3.S_2S_3 = r : s, \text{ d. h.}$$

Das Produkt aus den Abständen des Mittelpunktes des einbeschriebenen Kreises von den Mittelpunkten der auswärts berührenden Kreise verhält sich zum Produkt der Abstände dieser letzteren Punkte untereinander, wie der Radius des einbeschriebenen Kreises zum halben Umfang des Dreiecks. —

Zusatz 2.

Da SS_1, SS_2, SS_3 die oberen Theile der Höhenperpendikel im Dreieck $S_1S_2S_3$ sind, so hat man zugleich folgenden Satz:

Das Produkt der oberen Theile der Höhenperpendikel ist gleich dem Produkt aus dem Quadrat vom doppelten Durchmesser des dem Höhendreieck umschriebenen und dem Radius des demselben Dreieck einbeschriebenen Kreises.

Oder, da nach Lehrs. XXII der Radius des dem Dreieck $S_1S_2S_3$ umschriebenen Kreises $2R$ ist:

Das Produkt der oberen Theile der Höhenperpendikel ist gleich dem Produkt aus dem Quadrat vom Durchmesser des umschriebenen in den Radius des dem Höhendreieck einbeschriebenen Kreises.

Lehrsatz XXVI.

Figur 10.

Das Produkt aus den Abständen der Ecken des Dreiecks vom Mittelpunkt eines tangirenden Kreises ist gleich dem Produkt aus dem Radius des umschriebenen Kreises in das Quadrat vom Durchmesser des betreffenden tangirenden Kreises, d. h.

$$AS \,.\, BS \,.\, CS = 4\, Rr^2$$
$$AS_1 \,.\, BS_1 \,.\, CS_1 = 4\, Rr_1^2$$
$$AS_2 \,.\, BS_2 \,.\, CS_2 = 4\, Rr_2^2$$
$$AS_3 \,.\, BS_3 \,.\, CS_3 = 4\, Rr_3^2.$$

Beweis.

Nach Lehrs. IV, Zus. ist

$$BS \,.\, CS = SS_1 \,.\, Ss = SS_1 \,.\, r = 2\, BE \,.\, r$$

mithin

$$AS \,.\, BS \,.\, CS = 2\, AS \,.\, BE \,.\, r \text{ (I)}$$

Nun ist aber wegen Aehnlichkeit der Dreiecke

ASM und BDE

$$AS : SM = DE : BE, \text{ d. h.}$$
$$AS : r = 2\, R : BE$$

mithin

$$AS \,.\, BE = 2Rr \text{ (II)}$$

Aus (I) und (II) folgt

$$AS \,.\, BS \,.\, CS = 4Rr^2. \text{ —}$$

Eben so ist

$$BS_1 \,.\, CS_1 = SS_1 \,.\, r_1 = 2BE \,.\, r_1,$$

und wegen Aehnlichkeit der Dreiecke

AS_1L und BDE:

$$AS_1 : S_1L = DE : BE, \text{ d. i.}$$
$$AS_1 : r_1 = 2\, R : BE, \text{ mithin}$$
$$AS_1 \,.\, BE = 2\, Rr_1.$$

Demnach

$$AS_1 \,.\, BS_1 \,.\, CS_1 = 2\, AS_1 \,.\, BE \,.\, r_1$$
$$= 4\, Rr_1^2. \text{ —}$$

Eben so findet man

$$AS_2 \,.\, BS_2 \,.\, CS_2 = 4\, Rr_2^2$$
$$AS_3 \,.\, BS_3 \,.\, CS_3 = 4\, Rr_3^2.$$

Zusatz 1.

Da nach dem Beweis zu Lehrs. XXV

$$4Rr^2 = (r_1 - r)(r_2 - r)(r_3 - r),$$

so hat man auch

$$AS \cdot BS \cdot CS = (r_1 - r)(r_2 - r)(r_3 - r)$$

d. h. das Produkt aus den Abständen der Ecken des Dreiecks vom Mittelpunkt seines einbeschriebenen Kreises ist gleich dem Produkt aus den drei Differenzen, welche man erhält, indem man den Radius des einbeschriebenen Kreises von jedem Radius der auswärts berührenden Kreise abzieht. —

Aehnliche Ausdrücke erhält man für die anderen der obigen Produkte. Da nämlich

$$AS_1^2 = AL^2 + S_1 L^2$$
$$= s^2 + r_1^2$$

und $s^2 = r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3$ (Lehrs. XIX)

so ist

$$AS_1^2 = (r_1 + r_2)(r_1 + r_3).$$

Ferner ist

$$BS_1^2 = Bs_1^2 + S_1 s_1^2 = (s - c)^2 + r_1^2$$

Aber $(s - c)^2 = r_1 r_2 - r(r_1 + r_2)$ (Lehrs. XIX Zus. 1)

demnach

$$BS_1^2 = (r_1 - r)(r_1 + r_2).$$ Eben so
$$CS_1^2 = (r_1 - r)(r_1 + r_3).$$

Hieraus folgt

$$AS_1 \cdot BS_1 \cdot CS_1 = (r_1 - r)(r_1 + r_2)(r_1 + r_3).$$ Ebenso ist
$$AS_2 \cdot BS_2 \cdot CS_2 = (r_2 - r)(r_1 + r_2)(r_2 + r_3)$$
$$AS_3 \cdot BS_3 \cdot CS_3 = (r_3 - r)(r_1 + r_3)(r_2 + r_3)$$

d. h. das Produkt aus den Abständen der Ecken des Dreiecks von dem Mittelpunkte irgend eines seiner drei auswärts berührenden Kreise ist gleich dem Produkt dreier Faktoren, von welchen der erstere der Unterschied zwischen dem Radius des betreffenden Kreises und dem Radius des einbeschriebenen Kreises ist, die beiden letzteren aber die Summe aus dem Radius des betreffenden und dem Radius jedes der beiden andern auswärts berührenden Kreise sind. —

Multiplizirt man sämmtliche Relationen in einander, so hat man

$$AS \cdot BS \cdot CS \cdot AS_1 \cdot BS_1 \cdot CS_1 \cdot AS_2 \cdot BS_2 \cdot CS_2 \cdot AS_3 \cdot BS_3 \cdot CS_3$$
$$= (r_1 - r)^2 (r_2 - r)^2 (r_3 - r)^2 (r_1 + r_2)^2 (r_1 + r_3)^2 (r_2 + r_3)^2$$
$$= (4\,R)^4 (r \cdot r_1 r_2 r_3)^2$$ (Lehrs. XIV).
$$= (4\,R \cdot \Delta)^4$$
$$= (a\,b\,c)^4$$

d. h. das Produkt aus den zwölf Abständen der Ecken des Dreiecks von den Mittelpunkten seiner vier tangirenden Kreise ist gleich der vierfachen Potenz aus dem Produkt sämmtlicher Dreiecksseiten.

Zusatz 2.

Nach Lehrs. XXV ist

$$SS_1 \, . \, SS_2 \, . \, SS_3 = 16 \, R^2 \, r.$$

Hieraus folgt

$$AS.BS.CS : SS_1.SS_2.SS_3 = r : 4R$$

d. h. das Produkt der Abstände des Mittelpunkts des einbeschriebenen Kreises von den Ecken des Dreiecks verhält sich zum Produkt der Abstände desselben Punkts von den Mittelpunkten der auswärts berührenden Kreise, wie der Radius des einbeschriebenen Kreises zum doppelten Durchmesser des umschriebenen Kreises. —

Auch folgt noch mit Berücksichtigung von Lehrs. XXIV, Zusatz:

$$AS. \, BS. \, CS : SS_1. \, SS_2. \, SS_3 = AB. \, AC. \, BC : S_1S_2. \, S_1S_3. \, S_2S_3,$$

d. h. das Produkt der Abstände des Mittelpunkts des einbeschriebenen Kreises von den Ecken des Dreiecks verhält sich zum Produkt der Abstände desselben Punkts von den Mittelpunkten der auswärts berührenden Kreise, wie das Produkt sämmtlicher Seiten des Dreiecks zum Produkt der drei Geraden, welche die Mittelpunkte der auswärts berührenden Kreise verbinden.

Oder auch, wenn man das Dreieck $S_1S_2S_3$ als das ursprüngliche Dreieck betrachtet:

Das Produkt der unteren Theile der Höhenperpendikel verhält sich zum Produkt der oberen Theile derselben, wie das Produkt sämmtlicher Seiten des Höhendreiecks zum Produkt der drei Seiten des ursprünglichen Dreiecks.

Lehrsatz XXVII.

Figur 10.

Das Produkt aus den Abständen der Ecken des Dreiecks von den Mittelpunkten seiner gegenüberliegenden auswärts tangirenden Kreise ist gleich dem Produkt aus dem Radius des umschriebenen Kreises in das Quadrat vom Umfang des Dreiecks oder auch gleich dem Produkt aus den Summen von je zwei Radien der auswärts berührenden Kreise, d. h.:

$$AS_1. \, BS_2. \, CS_3 = R \, (a + b + c)^2 = (r_1 + r_2) \, (r_1 + r_3) \, (r_2 + r_3).$$

Beweis.

Nach Lehrſ. XV Zuſ. 2 iſt

$$AS.\ BS.\ CS : abc = abc : AS_1.\ BS_2.\ CS_3$$

mithin iſt

$$AS_1.\ BS_2.\ CS_3 = \frac{(abc)^2}{AS.\ BS.\ CS}$$

$$= \frac{(abc)^2}{4 R r^2} \text{ (ſ. Lehrſ. XXVI)}$$

$$= \frac{(4 R \triangle)^2}{4 R r^2} \text{ (ſ. Lehrſ. IV, Zuſ.)}$$

$$= 4 R s^2$$

$$= R (a + b + c)^2.$$

Ferner iſt nach Lehrſ. XXVI Zuſ. 1:

$AS_1^2 = (r_1 + r_2)(r_1 + r_3)$. Eben ſo

$BS_2^2 = (r_1 + r_2)(r_2 + r_3)$

$CS_3^2 = (r_1 + r_3)(r_2 + r_3)$.

Hieraus folgt

$$AS_1.\ BS_2.\ CS_3 = (r_1 + r_2)(r_1 + r_3)(r_2 + r_3).$$

Da $R = \frac{r_1+r_2+r_3-r}{4}$ u. $r = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3}$, ſo iſt $(a+b+c)^2 = 4(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)$ Nov. 17.

Zuſatz 1.

Da AS_1, BS_2, CS_3 die Höhenperpendikel im Dreieck $S_1 S_2 S_3$ und r_1, r_2, r_3 die aus den Ecken des Dreiecks $S_1\ S_2\ S_3$ auf die Seiten des Dreiecks ABC gefällten Senkrechten ſind, ſo kann dieſer Satz auch auf folgende Weiſe ausgedrückt werden:

Das Produkt ſämmtlicher Höhenperpendikel eines Dreiecks iſt gleich dem Produkt aus dem Quadrat vom Umfang des Höhendreiecks und dem Radius des dem Höhendreieck umſchriebenen Kreiſes.

Oder auch:

Das Produkt ſämmtlicher Höhenperpendikel eines Dreiecks iſt gleich dem Produkt aus der Summe von je zwei und zwei Senkrechten, welche von den Ecken des Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten des Höhendreiecks gefällt ſind. —

Zuſatz 2.

Aus dem Beweis zu unſerem Lehrſatz und Lehrſatz XXVI, Zuſatz 1 folgt noch:

$$BS_1.\ CS_1.\ AS_2.\ CS_2.\ AS_3.\ BS_3 = (abc)^2.$$

Nun iſt aber (Harm. Bhn. A. 2 Lehrſ. III)

$$AS_2.\ BS_3.\ CS_1 = AS_3.\ BS_1.\ CS_2.$$

Demnach auch

$$AS_2 . BS_3 . CS_1 = abc.$$

d. h. das Produkt dreier nicht an einander liegender Abschnitte der Seiten eines Dreiecks, welche Abschnitte hier durch die Fußpunkte der Höhenperpendikel gebildet sind, ist gleich dem Produkt aus sämmtlichen Seiten des Höhendreiecks. — (Siehe auch Lehrs. XV Zus. 2.)

Zusatz 3.

Nach Lehrs. XXIV ist

$$S_1S_2 . S_1S_3 . S_2S_3 = 16R^2s \text{ und da}$$

$$AS_1 . BS_2 . CS_3 = 4Rs^2 \text{ so folgt}$$

$$AS_1 . BS_2 . CS_3 : S_1 S_2 . S_1 S_3 . S_2 S_3 = s : 4R$$

d. h. das Produkt aus den Abständen der Ecken des Dreiecks von den ihnen gegenüberliegenden Mittelpunkten der auswärts berührenden Kreise verhält sich zum Produkt aus den Abständen der Mittelpunkte dieser Kreise, wie der halbe Umfang des Dreiecks zum doppelten Durchmesser seines umschriebenen Kreises.

Zusatz 4.

Es ist

$AS_1^2 = r_1^2 + s^2 = r_1^2 + r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3$ (Lehrs. XIX)

$AS^2 = r^2 + (s - a)^2 = r^2 + r_2 r_3 - r (r_2 + r_3)$ (Lehrsatz XIX, Zus. und Lehrs. XXI).

Hieraus folgt

$$AS_1^2 - AS^2 = r_1^2 - r^2 + (r_1 + r)(r_2 + r_3)$$

$$= (r_1 + r)(r_1 + r_2 + r_3 - r)$$

$$= 4 R (r_1 + r) \text{ (Lehrs. XIII)}$$

Eben so findet man

$$BS_2^2 - BS^2 = 4 R (r_2 + r)$$

$$CS_3^2 - CS^2 = 4 R (r_3 + r)$$

mithin, wenn man addirt:

$$AS_1^2 + BS_2^2 + CS_3^2 - (AS^2 + BS^2 + CS^2) =$$

$$4 R (r_1 + r_2 + r_3 + 3 r)$$

$$= 16 R (R + r)$$

d. h.: Die Summe der Quadrate über den einzelnen Distanzen von den Ecken des Dreiecks bis zu den Mittelpunkten der gegenüberliegenden auswärts berührenden Kreise, weniger der Summe der Quadrate über den Abständen der Ecken des Dreiecks vom Mittelpunkt des einbeschriebe-

nen Kreises ist gleich dem Rechteck aus dem vierfachen Durchmesser des umschriebenen in die Summe der Durchmesser des um- und einbeschriebenen Kreises.

Zusatz 5.

Da
$$AS_1^2 = r_1^2 + s^2$$
$$BS_2^2 = r_2^2 + s^2$$
$$CS_3^2 = r_3^2 + s^2$$
so erhält man
$$AS_1^2 + BS_2^2 + CS_3^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 3s^2$$
$$= (4\,R + r)^2 + s^2 \text{ (Lehrs. XIX Z. 2)}$$
$$= (r_1 + r_2 + r_3)^2 + r_1\,r_2 + r_1\,r_3 + r_2\,r_3 \text{ (Lehrs. XIII u. XIX)}$$
d. h.: Die Summe der Quadrate über den einzelnen Distanzen von den Ecken des Dreiecks bis zu den Mittelpunkten der gegenüberliegenden auswärts tangirenden Kreise ist gleich dem Quadrate der Summe der Radien dieser letzteren Kreise plus der Summe der Rechtecke von je zweien dieser Radien. —

Zusatz 6.

Der in Zusatz 4 erhaltene Werth von AS^2 läßt sich noch auf folgende Art darstellen.

Es ist
$$AS^2 = (r_2 - r)\,(r_3 - r). \text{ Eben so}$$
$$BS^2 = (r_1 - r)\,(r_3 - r)$$
$$CS^2 = (r_1 - r)\,(r_2 - r)$$
Multiplizirt man diese Relationen in einander, so wird man auf Lehrs. XXVI, Zus. 1 zurückgeführt. —

Lehrsatz XXVIII.

Figur 10.

Das Produkt aus den Radien derjenigen drei Kreise, welche einzeln durch je zwei Ecken des Dreiecks und durch den Mittelpunkt eines tangirenden Kreises gehen, ist gleich dem Produkt aus dem Durchmesser des letzten Kreises in das Quadrat vom Halbmesser des umschriebenen Kreises, d. h.
$$ES\;.\;FS\;.\;GS = 2\,R^2\,r$$
$$ES_1\;.\;PS_1\;.\;QS_1 = 2\,R^2\,r_1$$
$$DS_2\;.\;FS_2\;.\;QS_2 = 2\,R^2\,r_2$$
$$DS_3\;.\;GS_3\;.\;PS_3 = 2\,R^2\,r_3.$$

Beweis.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ASM und BDE folgt:

$$AS : SM = DE : BE,$$ d. i.

$$AS : r = 2R : BE$$

mithin $$BE = \frac{2Rr}{AS}$$

Da nun $$ES = BE,$$ (Lehrs. XI) so ist auch

$$ES = \frac{2Rr}{AS}.$$ Eben so

$$FS = \frac{2Rr}{BS}$$

$$GS = \frac{2Rr}{CS}$$

Hieraus folgt:

$$ES \,.\, FS \,.\, GS = \frac{8R^3r^3}{AS.\ BS.\ CS}$$ (s. Lehrs. XXVI)

$$= \frac{8R^3r^3}{4Rr^2}$$

$$= 2R^2r. \text{ —}$$

Ferner ist wegen Aehnlichkeit der Dreiecke AS_1L und BDE:

$$AS_1 : S_1L = DE : BE$$ oder

$$AS_1 : r_1 = 2R : ES_1$$

mithin

$$ES_1 = \frac{2Rr_1}{AS_1}$$

Aber auch

$$BS_1 \,.\, PS_1 = ES_1 \,.\, AS_1 = 2Rr_1$$

mithin

$$PS_1 = \frac{2Rr_1}{BS_1},$$ eben so

$$QS_1 = \frac{2Rr_1}{CS_1}$$

Hieraus folgt

$$ES_1 \,.\, PS_1 \,.\, QS_1 = \frac{8R^3r_1^3}{AS_1.\ BS_1\ CS_1}$$

$$= \frac{8R^3r_1^3}{4Rr_1^2}$$ (Lehrsatz XXVI.)

$$= 2R^2r_1$$

Eben so erhält man

$$DS_2 \,.\, FS_2 \,.\, QS_2 = 2R^2r_2$$

$$DS_3 \,.\, GS_3 \,.\, PS_3 = 2R^2r_3.$$

Zusatz 1.

Aus den Relationen unseres Lehrsatzes folgt noch:

$$ES.\,FS.\,GS.\,ES_1.\,PS_1.\,QS_1.\,DS_2.\,FS_2.\,QS_2.\,DS_3.\,GS_3.\,PS_3 = (2R^2)^4\,(\triangle)^2. \text{ (s. Lehrs. XIV)}$$

$$ES.\,FS.\,GS + ES_1.\,PS_1.\,QS_1 + DS_2.\,FS_2.\,QS_2 + DS_3.\,GS_3.\,PS_3 = 4R^2\,(2R + r). \text{ (s. Lehrs. XIII)}$$

$$ES_1.\,PS_1.\,QS_1 + DS_2.\,FS_2.\,QS_2 + DS_3.\,GS_3.\,PS_3 - ES.\,FS.\,GS. = 8R^3. \text{ (s. Lehrs. XIII).}$$

Zusatz 2.

Da

$$SS_1 = 2\,ES$$
$$SS_2 = 2\,FS$$
$$SS_3 = 2\,GS$$

so ist

$$SS_1.\,SS_2.\,SS_3 = 16\,R^2 r.$$ Dies ist Lehrsatz XXV.

Eben so erhält man

$$SS_1.\,S_2S_1.\,S_3S_1 = 16\,R^2 r_1.$$
$$SS_2.\,S_1S_2.\,S_3S_2 = 16\,R^2 r_2.$$
$$SS_3.\,S_1S_3.\,S_2S_3 = 16\,R^2 r_3$$

d. h.: Das Produkt aus den Abständen des Mittelpunkts irgend eines der vier tangirenden Kreise von den Mittelpunkten der drei übrigen Kreise ist gleich dem Quadrat vom doppelten Durchmesser des umschriebenen in den Radius des betreffenden tangirenden Kreises.

Lehrsatz XXIX.

Figur 10.

Die Summe der Quadrate von den Halbmessern derjenigen drei Kreise, welche durch je zwei Ecken des Dreiecks, durch den Mittelpunkt des einbeschriebenen und durch den Mittelpunkt eines auswärts berührenden Kreises gehen, ist gleich dem Rechteck aus dem Durchmesser des umschriebenen Kreises in den Ueberschuß dieses Durchmessers über den Halbmesser des einbeschriebenen Kreises, d. h.

$$ES^2 + FS^2 + GS^2 = 2R\,(2R - r)$$

Beweis.

Es ist

$$ES^2 = EB^2 = ED\,.\,EH = R\,(r_1 - r).$$ Eben so

$$FS^2 = R\,(r_2 - r)$$
$$GS^2 = R\,(r_3 - r)$$

Da nun überdieß

$$r_1 + r_2 + r_3 = 4R + r$$ (s. Lehrs. XIII), so ist

$$ES^2 + FS^2 + GS^2 = R(4R - 2r)$$
$$= 2R(2R - r)$$

Zusatz.

Da

$$SS_1 = 2\,ES$$
$$SS_2 = 2\,FS$$
$$SS_3 = 2\,GS,$$ so ist

$$SS_1^2 + SS_2^2 + SS_3^2 = 8R(2R - r)$$

d. h. die Summe der Quadrate der Abstände vom Mittelpunkt des einbeschriebenen zu den Mittelpunkten der auswärts tangirenden Kreise ist gleich dem Rechteck aus dem vierfachen Durchmesser des umschriebenen Kreises in den Ueberschuß dieses Durchmessers über den Halbmesser des einbeschriebenen Kreises. —

Da überdieß

$$SS_1^2 = 4R(r_1 - r)$$
$$SS_2^2 = 4R(r_2 - r)$$
$$SS_3^2 = 4R(r_3 - r)$$

und $(r_1 - r)(r_2 - r)(r_3 - r) = AS \,.\, BS \,.\, CS$ (Lehrs. XXVI) so ist

$$(SS_1 \,.\, SS_2 \,.\, SS_3)^2 = (4R)^3 \,.\, AS \,.\, BS \,.\, CS$$ oder

$$AS.BS.CS : SS_1.SS_2.SS_3 = SS_1.SS_2.SS_3 : (4R)^3$$

d. h. das Produkt der Abstände vom Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises zu den Mittelpunkten der auswärts tangirenden Kreise ist die mittlere Proportionalgröße zwischen dem Produkt der Abstände der Ecken vom Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises und der dritten Potenz vom doppelten Durchmesser des umschriebenen Kreises.

Lehrsatz XXX.

Figur 10.

Die Summe der Quadrate von den Halbmessern derjenigen drei Kreise, welche durch je zwei Ecken des Dreiecks und den Mittelpunkt eines und desselben auswärts berührenden Kreises gehen, ist gleich dem Rechteck aus dem Durchmesser des umschriebenen Kreises in die Summe dieses Durchmessers und des betreffenden auswärts berührenden Kreises, d. h.

$$ES_1^2 + PS_1^2 + QS_1^2 = 2R(2R + r_1)$$
$$FS_2^2 + DS_2^2 + QS_2^2 = 2R(2R + r_2)$$
$$GS_3^2 + DS_3^2 + PS_3^2 + 2R(2R + r_3)$$

Beweis.

Es ist

$$ES_1^2 = EB^2 = R\,(r_1 - r)$$
$$PS_1^2 = PA^2 = R\,(r_1 + r_3)$$
$$QS_1^2 = QA^2 = R\,(r_1 + r_2)$$

mithin

$$ES_1^2 + PS_1^2 + QS_1^2 = R\,(r_1 + r_2 + r_3 - r + 2r_1)$$

Aber $r_1 + r_2 + r_3 - r = 4\,R$ (Lehrs. XIII)

Demnach

$$ES_1^2 + PS_1^2 + QS_1^2 = 2\,R\,(2R + r_1).$$ Eben so
$$FS_2^2 + DS_2^2 + QS_2^2 = 2\,R\,(2R + r_2)$$
$$GS_3^2 + DS_3^2 + PS_3^2 = 2\,R\,(2R + r_3)$$

Zusatz 1.

Da noch

$ES^2 + FS^2 + GS^2 = 2R\,(2R - r)$, so erhält man

$$ES^2 + FS^2 + GS^2 + ES_1^2 + PS_1^2 + QS_1^2 + FS_2^2 + DS_2^2 + QS_2^2 + GS_3^2 + DS_3^2 + PS_3^2 = 24R^2. \text{ —}$$

Oder, da

$ES = ES_1$, $FS = FS_2$, $GS = GS_3$, $PS_1 = PS_3$, $QS_1 = QS_2$, $DS_2 = DS_3$

$$ES^2 + FS^2 + GS^2 + PS_1^2 + QS_2^2 + DS_3^2 = 12R^2$$

d. h. die Summe der Quadrate von den Radien derjenigen sechs Kreise, welche einzeln durch je zwei Ecken des Dreiecks und durch die Mittelpunkte von je zwei berührenden Kreisen gehen, ist gleich dem dreifachen Quadrat vom Durchmesser des umschriebenen Kreises. —

Zusatz 2.

Da

$$SS_1 = 2ES_1$$
$$S_3S_1 = 2PS_1$$
$$S_2S_1 = 2QS_1$$

so ist

$$SS_1^2 + S_2S_1^2 + S_3S_1^2 = 8R\,(2R + r_1).$$ Eben so
$$SS_2^2 + S_1S_2^2 + S_3S_2^2 = 8R\,(2R + r_2)$$
$$SS_3^2 + S_1S_3^2 + S_2S_3^2 = 8R\,(2R + r_3)$$

d. h. die Summe der Quadrate der Abstände vom Mittelpunkte eines der drei auswärts tangirenden Kreise zu den Mittelpunkten der drei übrigen berührenden Kreise ist gleich dem Rechteck aus dem vierfachen Durchmesser des umschriebenen Kreises in die Summe dieses Durchmessers und des Halbmessers des betreffenden auswärts berührenden Kreises.

Da ferner

$$SS_1 = 2ES$$
$$SS_2 = 2FS$$
$$SS_3 = 2GS$$
$$S_1S_3 = 2PS_1$$
$$S_1S_2 = 2QS_2$$
$$S_2S_3 = 2DS_3$$

so folgt noch aus Zus. I.

$$SS_1^2 + SS_2^2 + SS_3^2 + S_1S_2^2 + S_1S_3^2 + S_2S_3^2 = 48R^2$$

d. h. die Summe der Quadrate der sechs Abstände zwischen den einzelnen Mittelpunkten sämmtlicher tangirender Kreise ist gleich dem zwölffachen Quadrat vom Durchmesser des umschriebenen Kreises. —

Zusatz 3.

Es ist

$$SS_1^2 = 4R\,(r_1 - r)$$
$$S_2S_1^2 = 4R\,(r_1 + r_2)$$
$$S_3S_1^2 = 4R\,(r_1 + r_3)$$

ferner $(r_1 - r)\,(r_1 + r_2)\,(r_1 + r_3) = AS_1.BS_1CS_1$. (Lehrs. XXVI Zus. 1). Hieraus folgt

$$(SS_1.S_2S_1.S_3S_1)^2 = (4R)^3.\ AS_1.BS_1\,CS_1.$$ Eben so
$$(SS_2.S_1S_2.S_3S_2)^2 = (4R)^3.\ AS_2.BS_2\,CS_2$$
$$(SS_3.S_1S_3.S_2S_3)^2 = (4R)^3.\ AS_3.BS_3.CS_3$$

d. h. das Produkt der Abstände vom Mittelpunkte eines der drei auswärts berührenden Kreise zu den Mittelpunkten der drei übrigen tangirenden Kreise ist die mittlere Proportionalgröße zwischen dem Produkt der Abstände der Ecken von dem Mittelpunkte des betreffenden tangirenden Kreises und der dritten Potenz vom doppelten Durchmesser des umschriebenen Kreises. —

Lehrsatz XXXI.

Figur 10.

Die Mittelpunkte der drei außerhalb berührenden Kreise liegen so, daß die Summe der Quadrate ihrer Abstände von einander gleich ist dem doppelten Rechteck aus der Summe der Durchmesser dieser Kreise in den Durchmesser des um das Dreieck beschriebenen Kreises, d. h.:

$$S_1S_2^2 + S_1S_3^2 + S_2S_3^2 = 8R\,(r_1 + r_2 + r_3).$$

Beweis.

Nach Lehrs. XXX Zus. 2 ist

$$\left.\begin{aligned} SS_1^2 + S_2S_1^2 + S_3S_1^2 &= 8R\,(2R + r_1) \\ SS_2^2 + S_1S_2^2 + S_3S_2^2 &= 8R\,(2R + r_2) \\ SS_3^2 + S_1S_3^2 + S_2S_3^2 &= 8R\,(2R + r_3) \end{aligned}\right\} (A)$$

Hieraus folgt

$$SS_1^2 + SS_2^2 + SS_3^2 + 2\,(S_1S_2^2 + S_1S_3^2 + S_2S_3^2) = 8R\,(6R + r_1 + r_2 + r_3).$$

Nach Lehrs. XXIX Zusatz ist aber

$$SS_1^2 + SS_2^2 + SS_3^2 = 8R\,(2R - r).$$

Demnach erhält man:

$$2\,(S_1S_2^2 + S_1S_3^2 + S_2S_3^2) = 8R\,(4R + r + r_1 + r_2 + r_3).$$

Aber $\quad r_1 + r_2 + r_3 = 4R + r$ (Lehrs. XIII)

mithin $\quad S_1S_2^2 + S_1S_3^2 + S_2S_3^2 = 8R\,(r_1 + r_2 + r_3).$

Zusatz.

Nach Lehrs. XXX Zus. 2 ist

$$SS_1^2 + SS_2^2 + SS_3^2 + S_1S_2^2 + S_1S_3^2 + S_2S_3^2 = 48R^2.$$

Zieht man hievon nach einander die Relationen (A) ab, so erhält man:

$$\begin{aligned} SS_2^2 + SS_3^2 + S_2S_3^2 &= 8R\,(4R - r_1) \\ SS_1^2 + SS_3^2 + S_1S_3^2 &= 8R\,(4R - r_2) \\ SS_1^2 + SS_2^2 + S_1S_2^2 &= 8R\,(4R - r_3) \end{aligned}$$

d. h.: Die Summe der Quadrate von den drei Abständen irgend zweier Mittelpunkte der auswärts tangirenden Kreise von einander und vom Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises ist gleich dem vierfachen Rechteck aus dem Durchmesser des umschriebenen in den Ueberschuß dieses doppelten Durchmessers über den Halbmesser des dritten außerhalb berührenden Kreises.

Lehrsatz XXXII.

Die Mittelpunkte der vier tangirenden Kreise liegen so, daß das Quadrat vom Abstande je zweier von einander sammt dem Quadrat vom Abstande der beiden übrigen von einander jedesmal von derselben Größe ist, und zwar gleich dem vierfachen Quadrat vom Durchmesser des umschriebenen Kreises, d. h.:

$$SS_1^2 + S_2S_3^2 = SS_2^2 + S_1S_3^2 = SS_3^2 + S_1S_2^2 = 16R^2.$$

Beweis.

folgt aus Lehrs. XX Zus. 3, wenn man die Geraden AS_1, BS_2, CS_3 als Höhenperpendikel des Dreiecks $S_1S_2S_3$ betrachtet und aus Lehrs. XXII. —

Lehrsatz XXXIII.

Die Mittelpunkte der auswärts berührenden Kreise liegen so, daß das Produkt ihrer Abstände in einander gleich ist der Summe der drei Produkte aus den Abständen je zweier derselben von einander und vom Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises, d. h:

$$S_1S_2.S_1S_3.S_2S_3 = S_1S_2.SS_1.SS_2 + S_1S_3.SS_1.SS_3 + S_2S_3.SS_2.SS_3$$

Beweis.

Nach Lehrs. XXIX Zusatz ist

$$SS_1^2 = 4R\,(r_1 - r)$$
$$SS_2^2 = 4R\,(r_2 - r)$$

demnach

$$SS_1^2.SS_2^2 = 16R^2\,(r_1 - r)\,(r_2 - r)$$

Aber $(r_1 - r)\,(r_2 - r) = CS^2$ (Lehrs. XXVII Zus. 6)

demnach

$$SS_1\,.\,SS_2 = 4R\,.\,CS$$

d. h. der Durchmesser des dem Dreieck SS_1S_2 umschriebenen Kreises ist gleich dem Durchmesser des dem Dreieck $S_1S_2S_3$ zugehörigen umschriebenen Kreises (Lehrs. IV Zusatz, und Lehrs. XXII).

Hieraus folgt:

$$S_1S_2.S_1S_3.S_2S_3 = 8R \triangle S_1S_2S_3$$
$$S_1S_2.SS_1.SS_2. = 8R \triangle SS_1S_2$$
$$S_1S_3.SS_1.SS_3 = 8R \triangle SS_1S_3$$
$$S_2S_3.SS_2.SS_3 = 8R \triangle SS_2S_3.$$

Da nun

$$\triangle S_1S_2S_3 = \triangle\triangle\,(SS_1S_2 + SS_1S_3 + SS_2S_3)$$

so ist auch

$$S_1S_2.S_1S_3.S_2S_3 = S_1S_2.SS_1.SS_2 + S_1S_3.SS_1.SS_3 + S_2S_3.SS_2.SS_3.$$

Lehrsatz XXXIV

Das Rechteck aus dem Abstande des Mittelpunkts eines der vier tangirenden Kreise von der gegenüberliegenden Ecke des Dreiecks in den Halbmesser desjenigen Kreises, welcher durch die beiden übrigen Ecken und zugleich durch jenen Mittelpunkt geht, ist gleich dem Rechteck aus dem Durchmesser des umschriebenen und dem Halbmesser jenes berührenden Kreises, d. h.

$$AS\,.\,ES = 2Rr$$
$$AS_1\,.\,ES_1 = 2Rr_1$$
$$BS_2\,.\,FS_2 = 2Rr_2$$
$$CS_3\,.\,GS_3 = 2Rr_3.$$

Beweis.

Aus der Aehnlichkeit des Dreiecks BDE mit den Dreiecken ASM und AS_1L folgt

$$AS : SM = DE : BE$$

$$AS_1 : S_1L = DE : BE$$

Da nun $SM = r,\ S_1L = r_1,\ DE = 2R$

$BE = ES = ES_1$ ist,

so ergibt sich

$$AS.ES = 2Rr$$

$$AS_1.ES_1 = 2Rr_1.$$ Eben so ist

$$BS_2.FS_2 = 2Rr_2$$

$$CS_3.GS_3 = 2Rr_3.$$

Zusatz.

Da

$$SS_1 = 2ES$$

$$SS_2 = 2FS_2$$

$$SS_3 = 2GS_3$$

ist, so hat man

$$AS\ .\ SS_1 = BS\ .\ SS_2 = CS\ .\ SS_3 = 4Rr$$

d. h. wenn man das Dreieck $S_1S_2S_3$ als das ursprüngliche Dreieck betrachtet:

Das Rechteck aus dem oberen Theile eines Höhenperpendikels in seinen unteren Theil ist gleich dem Rechteck aus dem Durchmesser des umschriebenen in den Radius des dem Höhendreieck einbeschriebenen Kreises. —

Ferner hat man noch

$$AS_1\ .\ SS_1 = 4Rr_1$$

$$BS_2\ .\ SS_2 = 4Rr_2$$

$$CS_3\ .\ SS_3 = 4Rr_3$$

d. h. das Rechteck aus den Abständen irgend eines Mittelpunktes der drei auswärts tangirenden Kreise vom Mittelpunkt des einbeschriebenen, und der gegenüberliegenden Ecke des Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus dem Durchmesser des umschriebenen in den Durchmesser des betreffenden auswärts tangirenden Kreises.

Lehrsatz XXXV.

Figur 12, a und b.

Der Inhalt des ursprünglichen Dreiecks ABC verhält sich zum Inhalt des Dreiecks MNP, dessen Ecken die Berührungspunkte eines seiner vier tangirenden Kreise sind, wie der Durchmesser des dem ersten umschriebenen Kreises zum Radius des betreffenden tangirenden Kreises, d. h.

$$\triangle ABC : \triangle MNP = 2R : \left\{ \begin{matrix} r \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{matrix} \right\}$$

Beweis.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke

AMN und BDC
MSN und BEC

folgt die Aehnlichkeit der Vierecke

AMSN und DBEC.

Vermöge dieser Aehnlichkeit aber ist

$$AS : MN = DE : BC, \text{ mithin}$$
$$AS . BC = MN . DE, \text{ oder}$$
$$\text{da } DE = 2R,$$
$$AS.BC = 2R.MN. \text{ Eben so}$$
$$BS.AC = 2R.MP$$
$$CS.AB = 2R.NP.$$

Hieraus folgt:

$$AS.BS.CS.\ AB.AC.BC = 8R^3.\ MN.MP.NP.$$

Nun ist aber

$$AS.BS.CS = \left\{ \begin{matrix} 4Rr^2 \\ 4Rr_1^2 \end{matrix} \right\} \text{ (Lehrs. XXVI)}$$
$$AB.AC.BC = 4R\triangle ABC \text{ (Lehrs. IV Zus.)}$$
$$MN.MP.NP = \left\{ \begin{matrix} 4r \\ 4r_1 \end{matrix} \right\} \triangle MNP \text{ (Lehrs. IV Zus.)}$$

Die Substitution dieser Werthe ergibt

$$\begin{matrix} r \\ r_1 \end{matrix} \triangle ABC = 2R\triangle MNP$$

mithin ist

$$\triangle ABC : \triangle MNP = 2R : \left\{ \begin{matrix} r \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{matrix} \right\}$$

Anmerkung.

Einen anderen Beweis dieses Lehrsatzes siehe Harm. Bhn., A. 2, Lehrs. XLII. P. 182.

Zusatz 1.

Bezeichnen F, F_1, F_2, F_3 die Flächeninhalte derjenigen Dreiecke MNP, deren Ecken einzeln die Berührungspunkte eines der vier tangirenden Kreise sind, so ist in Folge unseres Lehrsatzes

$$F_1 = \frac{r_1}{2R} \triangle ABC$$

$$F_2 = \frac{r_2}{2R} \triangle ABC$$

$$F_3 = \frac{r_3}{2R} \triangle ABC$$

folglich

$$F_1 + F_2 + F_3 = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{2R} \triangle ABC$$

$$= \frac{4R + r}{2R} \triangle ABC \text{ (siehe Lehrs. XIII).}$$

$$= 2 \triangle ABC + \frac{r}{2R} \triangle ABC$$

$$= 2 \triangle ABC + F. —$$

d. h. die Summe der Flächeninhalte derjenigen drei Dreiecke, deren Ecken einzeln die Berührungspunkte der drei auswärts berührenden Kreise sind, ist gleich dem doppelten Inhalt des ursprünglichen Dreiecks plus dem Inhalt desjenigen Dreiecks, dessen Ecken die Berührungspunkte des einbeschriebenen Kreises sind.

Zusatz 2.

Aus der im Lehrsatz erhaltenen Relation

$$AS.BS.CS.\ AB.AC.BC = 8R^3.\ MN.MP.NP$$

folgt noch, wenn man für AS.BS.CS den Werth $4Rr^2$ ($4Rr_1^2$ *rc.*) setzt:

$$AB.AC.BC : MN.MP.NP = 2R^2 : \begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \\ r_2^2 \\ r_3^2 \end{matrix}$$

d. h. das Produkt der drei Seiten des ursprünglichen Dreiecks verhält sich zum Produkt der Seiten desjenigen Dreiecks, dessen Ecken die Berührungspunkte eines der vier tangirenden Kreise sind, wie das doppelte Quadrat vom Radius des dem ersten umschriebenen zum Quadrat vom Radius des betreffenden Berührungskreises. —

Dritter Abschnitt.

Die Höhenperpendikel.

Lehrsatz XXXVI.

Das Rechteck aus der Summe der Seiten in die Summe der reziproken Werthe dieser Seiten ist gleich dem Rechteck aus der Summe der Höhenperpendikel in die Summe der reziproken Werthe der Höhenperpendikel, d. h.:

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = (h_1 + h_2 + h_3)\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right)$$

Beweis.

Es ist

$$ah_1 = bh_2 = ch_3 = 2\triangle$$

mithin

$$\frac{1}{a} = \frac{h_1}{2\triangle}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{h_2}{2\triangle}$$

$$\frac{1}{c} = \frac{h_3}{2\triangle}, \text{ folglich}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{h_1 + h_2 + h_3}{2\triangle}$$

Nun ist aber $2\triangle = r\,(a + b + c)$, mithin

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{h_1 + h_2 + h_3}{r\,(a + b + c)}, \text{ folglich}$$

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a + b + c) = \frac{1}{r}\,(h_1 + h_2 + h_3)$$

Aber

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} \text{ (Lehrs. XVI)}$$

Hieraus folgt

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=(h_1+h_2+h_3)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)$$

Zusatz.

Eben so erhält man

$$(-a+b+c)\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=(-h_1+h_2+h_3)\left(-\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)$$

$$(a-b+c)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=(h_1-h_2+h_3)\left(\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)$$

$$(a+b-c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=(h_1+h_2-h_3)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}\right)$$

Lehrsatz XXXVII.

Figur 10.

Die um die einzelnen Dreiecke AOB, AOC, BOC, in welche das ursprüngliche Dreieck durch seine Höhenperpendikel getheilt wird, beschriebenen Kreise sind einander und dem um das ursprüngliche Dreieck beschriebenen Kreise gleich. —

Beweis.

Man verlängere das Perpendikel AA_1, bis es zum zweitenmal dem Kreise (Z) in O_1 begegnet, und ziehe BO_1, CO_1; dann ist

$$\angle BCO_1 = \angle C_1AO = \angle OCA_1.$$

Da überdieß $A_1C = A_1C$ und $\angle OA_1C = \angle O_1A_1C = 90°$, so ist $\triangle OA_1C = O_1A_1C$, mithin auch

$$AO = A_1O.$$

Hieraus folgt weiter

$$\triangle BOC = \triangle BO_1C.$$

Der um BO_1C beschriebene Kreis ist aber kein anderer als der Kreis (Z). Daher ist der um BOC beschriebene Kreis ebenfalls = (Z). Dasselbe gilt von den Kreisen, welche um die Dreiecke AOB und AOC beschrieben werden.

Anmerkung.

Vergl. auch den Beweis zu Lehrsatz XXXIII. —

Lehrsatz XXXVIII.

Das Rechteck aus dem Umfang des Höhendreiecks $A_1B_1C_1$ in den Radius des dem Höhendreieck umschriebenen Kreises ist gleich dem Inhalt des ursprünglichen Dreiecks, d. h., wenn wir den halben Umfang des Höhendreiecks mit s_1 bezeichnen:

$$\triangle ABC = Rs_1. —$$

Beweis

folgt aus Lehrsatz XXII und XXIII. —

Zusatz 1.

Nach Lehrs. XXIII ist

$$\triangle S_1S_2S_3 = 2Rs$$

Daraus folgt

$$\triangle S_1S_2S_3 : \triangle ABC = 2s : s_1$$

d. h. der Inhalt des Dreiecks $S_1S_2S_3$, dessen Ecken die Mittelpunkte der auswärts berührenden Kreise sind, verhält sich zum Inhalt des ursprünglichen Dreiecks, wie der Umfang dieses Dreiecks zum halben Umfang des Höhendreiecks.

Zusatz 2.

Setzt man den Radius des dem Höhendreieck $A_1B_1C_1$ einbeschriebenen Kreises $= \varrho$, so ist

$$\triangle A_1B_1C_1 = \varrho s_1$$

mithin

$$\triangle ABC : \triangle A_1B_1C_1 = R : \varrho$$

d. h. der Inhalt des ursprünglichen Dreiecks verhält sich zum Inhalt des Höhendreiecks, wie der Durchmesser des dem zweiten umschriebenen zum Radius seines einbeschriebenen Kreises.

Eben so hat man

$$\triangle S_1S_2S_3 : \triangle ABC = 2R : r$$

Hieraus folgt weiter:

$$\triangle S_1S_2S_3 : \triangle A_1B_1C_1 = 2R^2 : r\varrho$$

d. h. der Inhalt des Dreiecks, dessen Ecken die Mittelpunkte der auswärts tangirenden Kreise sind, verhält sich zum Inhalt des Höhendreiecks, wie das doppelte Quadrat vom Radius des dem ursprünglichen Dreieck umschriebenen zum Rechteck aus den Halbmessern der dem ursprünglichen, wie dem Höhendreieck einbeschriebenen Kreise.

Die Radien der umschriebenen Kreise für das Höhendreieck $A_1B_1C_1$, für das ursprüngliche Dreieck ABC und für das Dreieck $S_1S_2S_2$, dessen Ecken die Mittelpunkte der auswärts berührenden Kreise sind, verhalten sich wie

$$1 : 2 : 4$$

(Vergl. Lehrsatz XXII). —

Zusatz 3.

Nach Zus. 2 ist

$$\triangle\ S_1S_2S_3 : \triangle\ ABC = 2R : r$$

Nach Lehrs. XXXV ist

$$\triangle\ ABC : \triangle\ MNP = 2R : r$$

Hieraus folgt

$$\triangle\ S_1S_2S_3 : \triangle\ ABC = \triangle\ ABC : \triangle\ MNP$$

d. h. das ursprüngliche Dreieck ist die mittlere Proportionalgröße zwischen dem Dreieck $S_1S_2S_3$, dessen Ecken die Mittelpunkte der auswärts berührenden Kreise sind und dem Dreieck MNP, dessen Ecken die Berührungspunkte des einbeschriebenen Kreises sind.

Zusatz 4.

Nach Lehrs. IV Zus. ist

$$AB.AC.BC = 4R\ \triangle\ ABC$$

$$A_1B_1.A_1C_1.B_1C_1 = 2R\ \triangle\ A_1B_1C_1 \text{ (Lehrs. XII).}$$

Hieraus folgt

$$AB.AC.BC : A_1B_1.A_1C_1.B_1C_1 = 2\triangle\ ABC : \triangle\ A_1B_1C_1$$
$$= 2R : \varrho$$

d. h. das Produkt sämmtlicher Seiten des ursprünglichen Dreiecks verhält sich zum Produkt der Seiten des Höhendreiecks, wie der Durchmesser des dem ersten umschriebenen zum Radius des dem zweiten einbeschriebenen Kreises.

Lehrsatz XXXIX.

Figur 12, a und b.

Der Inhalt desjenigen Dreiecks, dessen Ecken die Berührungspunkte eines der vier tangirenden Kreise sind, verhält sich zum Inhalt des Höhendreiecks, wie der Radius des betreffenden tangirenden Kreises zum Durchmesser des dem zweiten einbeschriebenen Kreises d. h.

$$\triangle\ MNP : \triangle\ A_1B_1C_1 = \left\{\begin{matrix} r \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{matrix}\right\} : 2\varrho$$

Beweis.

Nach Lehrs. XXXV ist

$$\triangle\, MNP : \triangle\, ABC = \begin{Bmatrix} r \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} : 2R$$

Nach Lehrs. XXXVIII, Zus. 2 ist

$$\triangle\, ABC : \triangle\, A_1B_1C_1 = R : \varrho$$

Hieraus folgt:

$$\triangle\, MNP : \triangle\, A_1B_1C_1 = \begin{Bmatrix} r \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} : 2\varrho$$

Lehrsatz XL.

Der Radius $\mathfrak{R}$ des dem Dreieck $S_1S_2S_3$ einbeschriebenen Kreises verhält sich zum Radius r des dem ursprünglichen Dreieck ABC einbeschriebenen Kreises, wie der Umfang dieses Dreiecks zum Umfang des Dreiecks MNP, dessen Ecken die Berührungspunkte des einbeschriebenen Kreises sind d. h., wenn wir den halben Umfang des letzten Dreiecks mit s_2 bezeichnen:

$$\mathfrak{R} : r = s : s_2$$

Beweis.

Nach Lehrs. XVI ist

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{1}{AS_1} + \frac{1}{BS_2} + \frac{1}{CS_3}$$

$$= \frac{AS}{bc} + \frac{BS}{ac} + \frac{CS}{ab} \quad \text{(Lehrs. XV, Zus. 1)}$$

$$= \frac{a\,.\,AS + b\,.\,BS + c\,.\,CS}{abc}$$

$$= \frac{2R\,(MN + MP + NP)}{abc}$$

(siehe den Beweis zu Lehrs. XXXV)

$$= \frac{4Rs_2}{4R\,(\triangle\, ABC)}$$

$$= \frac{s_2}{rs}.$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{R} : r = s : s_2.$$

Zusatz.

Bezeichnen wir den halben Umfang des Dreieckd $S_1S_2S_3$ mit s_3, so ist

$$\mathfrak{R} = \frac{\triangle ABC}{s_2} \text{ und}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{\triangle S_1S_2S_3}{s_3}$$

Hieraus folgt

$$\triangle S_1S_2S_3 : \triangle ABC = s_3 : s_2.$$

Nun ist aber (Lehrsatz XXXVIII Zus. 2)

$$\triangle S_1S_2S_3 : \triangle ABC = 2R : r$$

mithin

$$s_3 : s_2 = 2R : r$$

d. h.: Der Umfang desjenigen Dreiecks, welches zu Ecken die Mittelpunkte der auswärts berührenden Kreise hat, verhält sich zum Umfang desjenigen Dreiecks, dessen Ecken die Berührungspunkte des einbeschriebenen Kreises sind, wie der Durchmesser des dem ursprünglichen Dreieck umschriebenen zum Radius seines einbeschriebenen Kreises.

Ferner ist

$$\triangle ABC = \mathfrak{R}s_2 \text{ und}$$

$$\triangle ABC = Rs_1 \text{ (Lehrs. XXXVIII).}$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{R} : R = s_1 : s_2$$

d. h. der Radius des dem Dreieck $S_1S_2S_3$ einbeschriebenen Kreises verhält sich zum Radius des dem ursprünglichen Dreieck ABC umschriebenen Kreises, wie der Umfang des Höhendreiecks zum Umfang desjenigen Dreiecks, dessen Ecken die Berührungspunkte des einbeschriebenen Kreises sind.

Lehrsatz XLI.

Figur 10.

Das Produkt aus den drei Höhenperpendikeln eines Dreiecks ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt des Dreiecks in den Umfang des Höhendreiecks, d. h.:

$$h_1h_2h_3 = 2s_1 \triangle.$$

Beweis.

Aus Lehrs. XXVII folgt

$$h_1h_2h_3 = 2Rs_1^2$$

Aber

$$Rs_1 = \triangle \text{ (Lehrs. XXXVIII).}$$

Daher

$$h_1h_2h_3 = 2s_1 \triangle$$

Zusatz 1.

Nach Lehrs. XXXVIII ist

$$s_1 = \frac{\Delta}{R}.$$

Hieraus folgt

$$h_1h_2h_3 = \frac{2(\Delta)^2}{R}$$

mithin

$$\Delta = \sqrt{(1/2 R . h_1h_2h_3)}$$

d. h. der Inhalt des ursprünglichen Dreiecks ist gleich der Quadratwurzel aus dem Produkt sämmtlicher Höhenperpendikel und dem Radius des dem Höhendreieck umschriebenen Kreises.

Derselbe Satz läßt sich auf folgende Weise herleiten:

Es ist

$$2Rh_1 = bc, \text{ mithin}$$

$$h_1 = \frac{bc}{2R} \text{ Eben so}$$

$$h_2 = \frac{ac}{2R}$$

$$h_3 = \frac{ab}{2R}$$

Hieraus folgt

$$h_1h_2h_3 = \frac{(abc)^2}{8R^3} = \frac{(4R\Delta)^2}{8R^3} = \frac{2\Delta^2}{R}, \text{ mithin}$$

$$\Delta = \sqrt{(1/2 R h_1h_2h_3)}.$$

Auch erhält man

$$h_1h_2h_3 = 2Rs_1^2$$

d. h. das Produkt aus den drei Höhenperpendikeln ist gleich dem Produkt aus dem Durchmesser des umschriebenen Kreises in das Quadrat vom halben Umfang des Höhendreiecks. —

Ferner folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke VS_1S und AaA_1:

$$VS_1 : SS_1 = Aa : AA_1 \text{ d. h.}$$

$$2R : SS_1 = Aa : h_1$$

mithin ist

$$Aa = \frac{2Rh_1}{SS_1} \text{ Eben so ist}$$

$$Bb = \frac{2Rh_2}{SS_2}$$

$$Cc = \frac{2Rh_3}{SS_3}.$$

Hieraus folgt

$$Aa.Bb.Cc. = \frac{8R^3 h_1 h_2 h_3}{SS_1.SS_2SS_3}$$

Nun ist

$$h_1 h_2 h_3 = \frac{2(\triangle)^2}{R}$$

$$SS_1SS_2.SS_3 = 16R^2r \text{ (Lehrs. XXV)}$$

mithin

$$\text{(I)} \quad Aa.Bb.Cc = \frac{(\triangle)^2}{r} = rs^2$$
$$= r\,(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)$$
$$= r_1r_2r_3$$

d. h. das Produkt der drei Geraden, welche die inneren Winkel des Dreiecks halbiren, ist gleich dem Produkt aus den drei Radien der auswärts berührenden Kreise.

Auch ist nach Lehrs. XV, Zus. 1 und Lehrs. IV, Zus.:

$$Aa\,.\,AE = bc = 2Rh_1, \text{ mithin}$$

$$AE = \frac{2Rh_1}{Aa}. \text{ Eben so}$$

$$BF = \frac{2Rh_2}{Bb}$$

$$CG = \frac{2Rh_3}{Cc}, \text{ folglich}$$

$$AE.BF.CG = \frac{8R^3.h_1h_2h_3}{Aa.Bb.Cc}$$

Aber

$$h_1h_2h_3 = \frac{2\,(\triangle)^2}{R}$$

$$Aa.Bb.Cc = r_1r_2r_3 = s\,(\triangle) \text{ (Lehrs. XVII, Zus. 1).}$$

Demnach

$$\text{(II)} \quad AE.BF.CG = \frac{16R^2\,(\triangle)}{s} = 16R^2r$$
$$= SS_1.SS_2.SS_3 \text{ (Lehrs. XXV)}$$

d. h. das Produkt der drei Geraden, welche die inneren Winkel eines Dreiecks halbiren, wenn diese Geraden bis zum Durchschnitt mit dem umschriebenen Kreis (Z) verlängert werden, ist gleich dem Produkte aus den Distanzen vom Mittelpunkt des einbeschriebenen zu den Mittelpunkten der drei auswärts berührenden Kreise.

Aus der Multiplikation von (I) und (II) folgt

$$Aa.Bb.Cc.AE.BF.CG = 16R^2 rr_1r_2r_3$$
$$= (4R \triangle)^2 \text{ (Lehrs. XIV)}$$
$$= (abc)^2 \text{ (Lehrs. IV, Zus.)}$$

welche Folgerung zugleich aus Lehrs. XV, Zus. 1, hervorgeht. —

Ferner ergibt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke Sas und AaA_1

$$Sa : Ss = Aa : AA_1, \text{ d. h.}$$
$$Sa : r = Aa : h_1, \text{ mithin}$$
$$Sa = \frac{r.Aa}{h_1}. \text{ Eben so ist}$$
$$Sb = \frac{r.Bb}{h_2}$$
$$Sc = \frac{r.Cc}{h_3}, \text{ folglich}$$
$$Sa.Sb.Sc = \frac{r^3 Aa.Bb.Cc}{h_1h_2h_3}$$
$$= \frac{r^2.rr_1r_2r_3}{2Rs_1^2}$$
$$= \frac{r^2(\triangle)^2}{2Rs_1^2} \text{ (Lehrs. XIV)}$$
$$= \frac{R^2r^2s_1^2}{2Rs_1^2} \text{ (Lehrs. XXXVIII)}$$
$$= \tfrac{1}{2}Rr^2.$$

d. h.: Das Produkt aus denjenigen drei Abschnitten der Halbirungslinien der inneren Winkel des Dreiecks, welche einerseits durch den Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises, andererseits durch die einzelnen Seiten des Dreiecks begrenzt werden, ist gleich dem Produkt aus dem Quadrat vom Radius des einbeschriebenen Kreises in den halben Radius des umschriebenen Kreises.

Auch hat man noch wegen Lehrs. XXVI:

$$Sa.Sb.Sc = \tfrac{1}{8}(AS.BS.CS) \text{ oder, was dasselbe}$$
$$AS.BS.CS = 8Sa.Sb.Sc. \text{ —}$$

Gleicherweise folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke S_1as_1 und AaA_1

$$S_1a : S_1s_1 = Aa : AA_1 \text{ oder}$$
$$S_1a : r_1 = Aa : h_1 \text{ mithin}$$
$$S_1a = \frac{r_1Aa}{h_1} \text{ Eben so}$$
$$S_2b = \frac{r_2Bb}{h_2}$$
$$S_3c = \frac{r_3Cc}{h_3}, \text{ folglich}$$

$$S_1a.S_2b.S_3c = \frac{r_1r_2r_3.Aa.Bb.Cc}{h_1h_2h_3}$$

$$= \frac{(r_1r_2r_3)^2}{h_1h_2h_3}.$$

Aber $r_1r_2r_3 = s(\triangle)$ (Lehrs. XVII, Zus. 1)

$$h_1h_2h_3 = \frac{2(\triangle)^2}{R}, \text{ mithin}$$

$$S_1a.S_2b.S_3c = \tfrac{1}{2} Rs^2$$

d. h.: Das Produkt aus denjenigen drei Abschnitten der Halbirungslinien der inneren Winkel des Dreiecks, welche einerseits durch je einen Mittelpunkt der auswärts tangirenden Kreise, andererseits durch die entsprechende Dreiecksseite begrenzt werden, ist gleich dem Produkt aus dem Quadrat vom halben Umfang des Dreiecks in den halben Radius des umschriebenen Kreises. —

Nach Lehrs. XXVII ist

$$AS_1.BS_2.CS_3 = 4Rs^2$$

demnach ist

$$S_1a.S_2b.S_3B = \tfrac{1}{8}(AS_1.BS_2.CS_3)$$

oder

$$AS_1.BS_2.CS_3 = 8.S_1a.S_2b.S_3C.$$

Auch folgt noch aus Lehrs. XIX und Lehrs. XXIII

$$S_1a.S_2b.S_3c = \tfrac{1}{2}R(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)$$

$$= \tfrac{1}{4}s(\triangle S_1S_2S_3). —$$

Ferner ist

$$Sa.Sb.Sc : S_1a.S_1b.S_1c = r^2 : s^2$$

Da nun nach Lehrs. XXV, Zus. 1:

$$SS_1.SS_2.SS_3 : S_1S_2.S_1S_3.S_2S_3 = r : s$$

so hat man noch:

$$Sa.Sb.Sc : S_1a.S_1b.S_1c = (SS_1.SS_2.SS_3)^2 : (S_1S_2.S_1S_3.S_2S_3)^2.$$

Zusatz 2.

Nach Zus. 1 ist

$Sa : r = Aa : h_1$. Hieraus folgt

$\frac{Sa}{Aa} = \frac{r}{h_1}$. Eben so ist

$$\frac{Sb}{Bb} = \frac{r}{h_2}$$

$\frac{Sc}{Cc} = \frac{r}{h_3}$, mithin

$$\frac{Sa}{Aa} + \frac{Sb}{Bb} + \frac{Sc}{Cc} = r\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right).$$

Aber

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{r} \text{ (Lehrs. XVI)}$$

Demnach

$$\frac{Sa}{Aa}+\frac{Sb}{Bb}+\frac{Sc}{Cc}=1.$$

Ferner ist

$$AS : Aa = h_1 - r : h_1$$

Aber
$$h_1 = \frac{2rr_1}{r_1 - r} \text{ (Lehrs. XVII, Zus. 3)}$$

mithin
$$h_1 - r = \frac{r(r_1+r)}{r_1 - r}.$$

Demnach

$$AS : Aa = r_1 + r : 2r_1 \text{ oder}$$

$$\frac{AS}{Aa}=\frac{1}{2}r\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right). \text{ Eben so}$$

$$\frac{BS}{Bb}=\frac{1}{2}r\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_2}\right)$$

$$\frac{CS}{Cc}=\frac{1}{2}r\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_3}\right)$$

Da nun
$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r} \text{ (Lehrs. XVII)}$$

so erhält man

$$\frac{AS}{Aa}+\frac{BS}{Bb}+\frac{CS}{Cc}=2. -$$

Zusatz 3.

Nach Lehrs. XIV ist

$$(\triangle)^2 = rr_1r_2r_3$$

mithin auch

$$h_1h_2h_3 = \frac{2rr_1r_2r_3}{R}$$

Aus dem gleichen Grunde ist, wenn man die Radien der vier das Dreieck $S_1S_2S_3$ tangirenden Kreise mit $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$ bezeichnet:

$$AS_1.BS_2.CS_3 = \frac{\mathfrak{R}.\mathfrak{R}_1.\mathfrak{R}_2\mathfrak{R}_3}{R}$$

Nach Lehrs. XXVII aber ist

$$AS_1.BS_2.CS_3 = (r_1+r_2)(r_1+r_3)(r_2+r_3).$$

Hieraus folgt

$$(\triangle S_1S_2S_3)^2 = R(r_1+r_2)(r_1+r_3)(r_2+r_3).$$

Eben so ist, wenn man die Radien der drei das Höhendreieck $A_1B_1C_1$ auswärts tangirenden Kreise ϱ_1, ϱ_2 ϱ_3 nennt:

$$(\triangle)^2 = {}^1/_2R\,(\varrho_1 + \varrho_2)\,(\varrho_1 + \varrho_3)\,(\varrho_2 + \varrho_3).$$

d. h. das Quadrat vom Inhalt des ursprünglichen Dreiecks ist gleich einem Produkt aus vier Faktoren, von denen der erste gleich dem Radius des dem Höhendreieck umschriebenen Kreises, und von denen die drei anderen die Summen von je zwei und zwei Radien der das Höhendreieck auswärts tangirenden Kreise sind. —

Zusatz 4.

Nach Lehrs. XVII, Zus. 3 ist

$$h_1 = \frac{2rr_1}{r_1 - r}$$

$$h_2 = \frac{2rr_2}{r_2 - r}$$

$$h_3 = \frac{2rr_3}{r_3 - r}$$

Hieraus folgt

$$h_1h_2h_3 = \frac{8r^2.rr_1r_2r_3}{(r_1 - r)\,(r_2 - r)\,(r_3 - r)}$$

Nun ist

$$rr_1r_2r_3 = (\triangle)^2 \text{ (Lehrs. XIV)}$$

und $(r_1 - r)\,(r_2 - r)\,(r_3 - r) = AS.BS.CS$ (Lehrs. XXVI, Zus. 1) mithin ist

$$h_1h_2h_3.AS.BS.CS = 8r^2(\triangle)^2.$$

D. h.: Das Produkt der drei Höhenperpendikel in das Produkt der drei Abstände der Ecken des Dreiecks vom Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises ist gleich dem doppelten Produkt aus dem Quadrat vom Durchmesser des einbeschriebenen Kreises in das Quadrat vom Inhalt des Dreiecks.

Zusatz 5.

Da

$$s_1^2 = \varrho_1\varrho_2 + \varrho_1\varrho_3 + \varrho_2\varrho_3 \text{ (Lehrs. XIX)}$$

so folgt noch aus Zus. 1:

$$h_1h_2h_3 = 2R\,(\varrho_1\varrho_2 + \varrho_1\varrho_3 + \varrho_2\varrho_3)$$

d. h. das Produkt der drei Höhenperpendikel eines Dreiecks ist gleich dem Produkt aus dem Durchmesser des umschriebenen Kreises in die Summe der Verbindungen von je zwei Radien der auswärts tangirenden Kreise des Höhendreiecks.

Lehrsatz XLII.

Der Umfang des ursprünglichen Dreiecks verhält sich zum Umfang des Höhendreiecks, wie der Radius des dem ersten umschriebenen zum Radius seines einbeschriebenen Kreises, d. h.

$$s : s_1 = R : r.$$

Beweis.

Es ist $\triangle ABC = rs$ und

$\triangle ABC = Rs_1$ (Lehrs. XXXVIII)

mithin

$$s : s_1 = R : r.$$

Zusatz 1.

Nach Lehrs. XVI ist

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}$$

mithin

$$h_1h_2h_3 = r\,(h_1h_2 + h_1h_3 + h_2h_3).$$

Nach Lehrs. XLI Zus. 1 ist

$$h_1h_2h_3 = 2Rs_1^2, \text{ mithin}$$

$$h_1h_2 + h_1h_3 + h_2h_3 = \frac{2Rs_1^2}{r}$$

Da nun nach unserem Lehrsatz

$$\frac{R}{r} = \frac{s}{s_1}, \text{ so ergibt sich}$$

$$h_1h_2 + h_1h_3 + h_2h_3 = 2ss_1.$$

D. h.: Die Summe der Rechtecke aus je zwei Höhenperpendikeln ist gleich dem doppelten Rechteck aus dem halben Umfang des ursprünglichen Dreiecks in den halben Umfang des Höhendreiecks.

Zusatz 2.

Nach Lehrs. XIV ist

$$(\triangle)^2 = rr_1r_2r_3.$$

Nach Lehrs. XLI, Zus. 1, ist

$$(\triangle)^2 = \tfrac{1}{2}Rh_1h_2h_3$$

Hieraus folgt

$$r_1r_2r_3 : h_1h_2h_3 = R : 2r$$

d. h.: Das Produkt sämmtlicher Radien der auswärts berührenden Kreise verhält sich zum Produkt der Höhenperpendikel, wie der Radius des umschriebenen zum Durchmesser des einbeschriebenen Kreises.

Nach Lehrs. XVII, Zus. 1 und Lehrs. XIX ist ferner

$$r_1 r_2 r_3 = rs^2.$$

Nach Lehrs. XXXIX, Zus. 1, hat man

$$h_1 h_2 h_3 = r\,(h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3)$$

Setzt man diese Werthe in die obige Proportion, so erhält man

$$s^2 : h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3 = R : 2r$$

d. h.: Das Quadrat vom halben Umfang des Dreiecks verhält sich zur Summe der Rechtecke aus je zwei Höhenperpendikeln des Dreiecks, wie der Radius des umschriebenen zum Durchmesser des einbeschriebenen Kreises.

Da ferner

$$s^2 = r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 \text{ (Lehrs. XIX)},$$

so ist auch

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 : h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3 = R : 2r$$

d. h.: Die Summe der Rechtecke aus je zwei Radien der auswärts berührenden Kreise verhält sich zur Summe der Rechtecke aus je zwei Höhenperpendikeln des Dreiecks, wie der Radius des umschriebenen zum Durchmesser des einbeschriebenen Kreises.

Lehrsatz XLIII.

Figur 11.

Wenn man aus dem Fußpunkte irgend eines der drei Höhenperpendikel auf die beiden anderen Seiten des Dreiecks Perpendikel fällt, so ist die Gerade, welche die Fußpunkte dieser beiden Perpendikel mit einander verbindet, gleich dem halben Umfang des Höhendreiecks, d. h.:

$$xy = s_1. —$$

Beweis.

Man verlängere die A_1x und A_1y, bis sie der B_1C_1 in a_1 und α_1 begegnen, dann ist

$$\angle AB_1C_1 = \angle a_1B_1C \text{ und}$$
$$\angle AB_1C_1 = \angle A_1B_1C$$

mithin

$$\angle a_1B_1C = \angle A_1B_1C. \text{ Eben so}$$
$$\angle \alpha_1C_1B = \angle A_1C_1B.$$

Hieraus folgt

$$a_1B_1 = A_1B_1$$
$$\alpha_1C_1 = A_1C_1,$$

mithin

$$a_1\alpha_1 = A_1B_1 + A_1C_1 + B_1C_1 = 2s_1. —$$

Da nun x in der Mitte von A_1a_1, y in der Mitte von $A_1\alpha_1$ liegt so ist

$$xy = s_1. —$$

Lehrsatz XLIV.

Die Summe der Quadrate von den Seiten des Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus dem doppelten Durchmesser des umschriebenen Kreises in die Summe von diesem Durchmesser und dem Radius des dem Höhendreieck einbeschriebenen Kreises, d. h.:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4R\,(2R + \varrho).$$

Beweis

folgt aus Lehrs. XXXI, XXII und XIII.

Zusatz.

Auch ist

$a^2 + b^2 + c^2 = 4R\,(\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3)$ (siehe Lehrs. XXXI.)

Ferner

$$BO^2 + CO^2 + BC^2 = 4R\,(2R - \varrho_1)$$
$$AO^2 + CO^2 + AC^2 = 4R\,(2R - \varrho_2)$$
$$AO^2 + BO^2 + AB^2 = 4R\,(2R - \varrho_3)$$

S. Lehrs. XXXI, Zusatz.

Lehrsatz XLV.

Die Summe der Quadrate der oberen Theile der Höhenperpendikel ist gleich dem Rechteck aus dem Durchmesser des umschriebenen Kreises in den Unterschied dieses Durchmessers vom Durchmesser des dem Höhendreieck einbeschriebenen Kreises, d. h.:

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 = 4R\,(R - \varrho).$$

Beweis

folgt aus Lehrs. XXIX, Zusatz, und Lehrs. XXII.

Zusatz.

Auch ist

$$A_1O.B_1O.C_1O : AO.BO.CO = AO.BO.CO : (2R)^3$$

d. h. das Produkt der oberen Theile der Höhenperpendikel ist die mittlere Proportionale zwischen dem Produkt der unteren Theile und der dritten Potenz vom Durchmesser des umschriebenen Kreises (siehe Lehrs. XXIX, Zusatz).

Lehrsatz XLVI.

Die Summe der Quadrate der Radien der vier tangirenden Kreise ist gleich der Summe der Quadrate der oberen Theile der Höhenperpendikel plus dem Quadrat vom Durchmesser des umschriebenen Kreises, d. h.

$$r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = AO^2 + BO^2 + CO^2 + 4R^2.$$

Beweis.

Nach Lehrs. XIII ist

$$r_1 + r_2 + r_3 = 4R + r, \text{ mithin}$$

$$r + r_1 + r_2 + r_3 = 4R + 2r$$

$$= 2(R + r) + 2R$$

$$= AO + BO + CO + 2R \text{ (s. Lehrs. XX).}$$

Hieraus folgt

$$r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2(rr_1 + rr_2 + rr_3 + r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3) = AO^2 + BO^2 + CO^2 + 4R^2 + 2(AO.BO + AO.CO + BO.CO) + 4R\,(AO + BO + CO).$$

Nun ist aber

$$rr_1 + rr_2 + rr_3 + r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = ab + ac + bc \text{ (Lehrs. XV).}$$

$$AO.BO = 2R.A_1O \text{ (Lehrs. IV und Lehrs. XXXVII)}$$

mithin

$$AO.BO + AO.CO + BO.CO + 2R\,(AO + BO + CO) = 2R\,(h_1 + h_2 + h_3).$$

Nach Lehrs. IV ist aber

$$2R.h_1 = bc, \text{ demnach auch}$$

$$2R(h_1 + h_2 + h_3) = ab + ac + bc. —$$

mithin, wenn man substituirt:

$$r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = AO^2 + BO^2 + CO^2 + 4R^2. —$$

Zusatz.

Nach Lehrsatz XLV ist

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 = 4R^2 - 4R\varrho, \text{ demnach}$$

$$r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 8R^2 - 4R\varrho. \text{ Ferner ist}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2 + 4R\varrho \text{ (Lehrs. XLIV)}$$

mithin

$$a^2 + b^2 + c^2 + r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 16R^2$$

d. h.: Die Summe der Quadrate der drei Seiten, plus der Summe der Quadrate der Radien der vier berührenden Kreise ist gleich dem vierfachen Quadrat vom Durchmesser des umschriebenen Kreises.

Lehrsatz XLVII.

Die Summe der Rechtecke aus je zwei unteren Theilen der drei Höhenperpendikel ist gleich dem Rechteck aus der Summe der Radien des um- und einbeschriebenen Kreises in den Durchmesser des dem Höhendreieck einbeschriebenen Kreises, d. h.

$$A_1O.B_1O + A_1O.C_1O + B_1O.C_1O = 2\varrho\,(R + r)$$

Beweis 1.

Aus Lehrs. XXXIV, Zusatz und Lehrs. XXII folgt

$$AO.A_1O = 2R\varrho, \text{ mithin}$$

$$\frac{1}{A_1O} = \frac{AO}{2R\varrho}. \text{ Eben so}$$

$$\frac{1}{B_1O} = \frac{BO}{2R\varrho}$$

$$\frac{1}{C_1O} = \frac{CO}{2R\varrho}$$

Da nun $AO + BO + CO = 2(R + r)$ (Lehrs. XX), so erhält man

$$\frac{1}{A_1O} + \frac{1}{B_1O} + \frac{1}{C_1O} = \frac{R + r}{R\varrho}, \text{ mithin auch}$$

$$A_1O.B_1O + A_1O.C_1O + B_1O.C_1O = \frac{R + r}{R\varrho}\,(A_1O.B_1O.C_1O)$$

Aus Lehrs. XXVI und Lehrs. XXII folgt aber

$$A_1O.B_1O.C_1O = 2R\varrho^2$$

mithin

$$A_1O.B_1O + A_1O.C_1O + B_1O.C_1O = 2\varrho\,(R + r)$$

Beweis 2.

Da AO der Durchmesser des um das Dreieck B_1OC_1 beschriebenen Kreises ist, so hat man nach Lehrs. IV Zus.

$$B_1O.C_1O = AO.\varrho. \text{ Eben so ist}$$
$$A_1O.C_1O = BO.\varrho$$
$$A_1O.B_1O = CO.\varrho, \text{ mithin}$$
$$A_1O.B_1O + A_1O.C_1O + B_1O.C_1O = \varrho\,(AO + BO + CO)$$
$$= 2\varrho\,(R + r) \text{ (Lehrsatz XX.)}$$

Lehrsatz XLVIII.

Die Summe der Rechtecke aus je zwei oberen Theilen der Höhenperpendikel ist gleich dem Rechteck aus der Summe der unteren Theile der Höhenperpendikel in den Durchmesser des umschriebenen Kreises, d. h.

$$AO.BO + AO.CO + BO.CO = 2R\,(A_1O + B_1O + C_1O)$$

Beweis.

Nach Lehrs. XXXVII und Lehrs. IV, Zus. ist

$$BO.CO = 2R.A_1O$$
$$AO.CO = 2R.B_1O$$
$$AO.BO = 2R.C_1O, \text{ mithin}$$
$$AO.BO + AO.CO + BO.CO = 2R\,(A_1O + B_1O + C_1O).$$

Zusatz.

Figur 10.

~~Aus der Aehnlichkeit der Vierecke AB_1OC_1 und DGEB folgt noch~~

~~$AO : B_1C_1 = DE : BC$~~

mithin

~~$AO.BC = DE.B_1C_1$ oder, da~~

~~$DE = 2R$,~~

$$AO.BC = 2R.B_1C_1. \text{ Eben so}$$
$$BO.AC = 2R.A_1C_1$$
$$CO.AB = 2R.A_1B_1.$$

Addirt man diese Relationen, so erhält man, da

$$A_1B_1 + A_1C_1 + B_1C_1 = 2s_1 \text{ ist:}$$
$$AO.BC + BO.AC + CO.AB = 4Rs_1$$
$$= 4\,\triangle\,ABC \text{ (Lehrs. XXXVIII)}$$

d. h.: Die Summe der Produkte aus den einzelnen Dreiecksseiten in die oberen Theile ihrer zugehörigen Höhenperpendikel ist gleich dem vierfachen Inhalt des Dreiecks. —

Lehrsatz IL.

Das Produkt der unteren Theile der Höhenperpendikel verhält sich zum Produkt der oberen Theile, wie der Radius des dem Höhendreieck einbeschriebenen zum Durchmesser des dem ursprünglichen Dreieck umschriebenen Kreises, d. h.

$$A_1O.B_1O.C_1O : AO.BO.CO = \varrho : 2R$$

Beweis.

Aus Lehrs. XXVI und Lehrs. XXII folgt

$$A_1O.B_1O.C_1O = 2R\varrho^2.$$

Eben so ist nach Lehrs. XXVIII Zus. 2 und Lehrs. XXII

$$AO.BO.CO = 4R^2\varrho.$$

Hieraus ergibt sich

$$A_1O.B_1O.C_1O : AO.BO.CO = \varrho : 2R.$$

Zusatz.

Nach Lehrs. XVII Zus. 1 ist

$$\varrho_1\varrho_2\varrho_3 = \varrho\,(\varrho_1\varrho_2 + \varrho_1\varrho_3 + \varrho_2\varrho_3)$$
$$= \varrho s_1^2 \text{ (Lehrs. XIX)}$$
$$= s_1 \triangle A_1B_1C_1.$$

Nach Lehrs. XLI ist

$$h_1h_2h_3 = 2s_1 \triangle ABC$$
$$= \frac{2s_1R}{\varrho} \triangle A_1B_1C_1 \text{ (Lehrs. XXXVIII Zus. 2)}$$

mithin

$$\varrho_1\varrho_2\varrho_3 : h_1h_2h_3 = \varrho : 2R$$

d. h.: Das Produkt der Radien der das Höhendreieck auswärts berührenden Kreise verhält sich zum Produkt der Höhenperpendikel, wie der Radius des dem Höhendreieck einbeschriebenen zum Durchmesser des dem ursprünglichen Dreieck umschriebenen Kreises.

Auch folgt

$$A_1O.B_1O.C_1O : AO.BO.CO = \varrho_1\varrho_2\varrho_3 : h_1h_2h_3$$

d. h. das Produkt der unteren Theile der Höhenperpendikel verhält sich zum Produkt der oberen Theile, wie das Produkt der Radien der das

Höhendreieck auswärts berührenden Kreise zum Produkt der Höhenperpendikel.

Ferner folgt

$$A_1O.B_1O.C_1O.h_1.h_2.h_3 = AO.BO.CO.\varrho_1\varrho_2\varrho_3.$$

Aber

$$AO.\varrho_1 = AB_1.AC_1. \quad \text{(Lehrs. } IV\text{, Zus.)}$$
$$BO.\varrho_2 = BC_1.BA_1$$
$$CO.\varrho_3 = CA_1.CB_1, \text{ mithin}$$
$$AO.BO.CO.\varrho_1\varrho_2\varrho_3 = AB_1.BC_1.CA_1 \times AC_1.BA_1.CB_1$$
$$= (AB_1.BC_1.CA_1)^2$$
$$= (A_1B_1.A_1C_1.B_1C_1)^2$$ (siehe Lehrsatz XXV*II*, Zusatz 2)

Demnach ist

$$A_1O.B_1O.C_1O.h_1.h_2.h_3 = (A_1B_1.A_1C_1.B_1C_1)^2$$

d. h. das Produkt sämmtlicher Seiten des Höhendreiecks ist die mittlere Proportionalgröße zwischen dem Produkt der ganzen Höhenperpendikel und dem Produkt der unteren Theile derselben. (Siehe auch Lehrsatz XV, Zusatz 2).

Lehrsatz L.

Das Rechteck aus dem Radius des umschriebenen Kreises in die Summe der unteren Theile der Höhenperpendikel ist gleich dem Quadrat vom Halbmesser des einbeschriebenen Kreises, plus dem Rechteck aus dem Radius des umschriebenen Kreises in die Summe vom Durchmesser des einbeschriebenen und dem Halbmesser des dem Höhendreieck einbeschriebenen Kreises, d. h.

$$R\,(A_1O + B_1O + C_1O) = r^2 + R\,(2r + \varrho)$$

Beweis.

Nach Lehrs. XX ist

$$AO + BO + CO = 2\,(R + r) \text{ mithin}$$
$$AO^2 + BO^2 + CO^2 + 2\,(AO.BO + AO.CO + BO.CO) = 4\,(R + r)^2.$$

Nun ist nach Lehrs. XLV und XLV*III*

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 = 4R\,(R - \varrho) \text{ und}$$
$$AO.BO + AO.CO + BO.CO = 2R\,(A_1O + B_1O + C_1O)$$

Die Substitution dieser Werthe ergibt

$$R\,(R - \varrho) + R\,(A_1O + B_1O + C_1O) = (R + r)^2$$

Hieraus folgt

$$R\,(A_1O + B_1O + C_1O) = r^2 + R\,(2r + \varrho).$$

Lehrsatz LI.

Die Summe der Quadrate der unteren Theile der Höhenperpendikel ist gleich dem Quadrat vom halben Umfang des Höhendreiecks weniger dem Rechteck aus dem Radius des dem Höhendreieck einbeschriebenen Kreises in die Differenz dieses Radius vom doppelten Durchmesser des dem ursprünglichen Dreieck umschriebenen Kreises, d. h.

$$A_1O^2 + B_1O^2 + C_1O^2 = s_1^2 - \varrho\,(4R - \varrho)$$

Beweis.

Bezeichnet man die Seiten des Höhendreiecks mit a_1, b_1, c_1, so ist

$$A_1O^2 = \varrho^2 + (s_1 - a_1)^2$$
$$B_1O^2 = \varrho^2 + (s_1 - b_1)^2$$
$$C_1O^2 = \varrho^2 + (s_1 - c_1)^2$$

mithin

$$A_1O^2 + B_1O^2 + C_1O^2 = 3\varrho^2 + 3s_1^2 - 2s_1\,(a_1 + b_1 + c_1) + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$$

Nun ist

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - 2s_1\,(a_1 + b_1 + c_1) = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - (a_1 + b_1 + c_1)^2$$
$$= -\,2\,(a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1)$$
$$= -\,2\,(\varrho\,(\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3) + \varrho_1\varrho_2 + \varrho_1\varrho_3 + \varrho_2\varrho_3)$$
$$= -\,2\,(\varrho\,(2R + \varrho) + s_1^2)$$

Hieraus folgt

$$A_1O^2 + B_1O^2 + C_1O^2 = \varrho^2 - 4R\varrho + s_1^2,$$ oder

was dasselbe:

$$A_1O^2 + B_1O^2 + C_1O^2 = s_1^2 - \varrho\,(4R - \varrho).$$

Zusatz 1.

Da $s_1^2 = \varrho_1\varrho_2 + \varrho_1\varrho_3 + \varrho_2\varrho_3$ (Lehrs. XIX),
so ist auch

$$A_1O^2 + B_1O^2 + C_1O^2 = \varrho\,(2R + \varrho) + \varrho_1\varrho_2 + \varrho_1\varrho_3 + \varrho_2\varrho_3 - 6R\varrho.$$

Aber $2R + \varrho = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3$ (Lehrs. XIII und Lehrs. XXII).
Demnach

$$A_1O^2 + B_1O^2 + C_1O^2 = \varrho\varrho_1 + \varrho\varrho_2 + \varrho\varrho_3 + \varrho_1\varrho_2 + \varrho_1\varrho_3 + \varrho_2\varrho_3 - 6R\varrho$$
$$= a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1 - 6R\varrho \text{ (Lehrs. XV)}$$

d. h. die Summe der Quadrate der unteren Theile der Höhenperpendikel ist gleich der Summe der Rechtecke aus je zwei Seiten des Höhendreiecks,

weniger dem sechsfachen Rechteck aus dem Radius des umschriebenen in den Radius des dem Höhendreieck einbeschriebenen Kreises. —

Zusatz 2.

Nach unserem Lehrsatz ist

$$A_1O^2 + B_1O^2 + C_1O^2 = s_1^2 - \varrho\,(4R - \varrho).$$

Nach Lehrsatz XLVII ist

$$2\,(A_1O.B_1O + A_1O.C_1O + B_1O.C_1O) = 4\varrho\,(R + r).$$

Hieraus folgt

$$(A_1O + B_1O + C_1O)^2 = s_1^2 + \varrho\,(4r + \varrho)$$

d. h. das Quadrat der Summe der unteren Theile der Höhenperpendikel ist gleich dem Quadrat vom halben Umfang des Höhendreiecks plus dem Rechteck aus dem Halbmesser des dem Höhendreieck einbeschriebenen Kreises in die Summe dieses Radius und des doppelten Durchmessers des dem ursprünglichen Dreieck einbeschriebenen Kreises.

Lehrsatz LII.

Figur 11.

Die Summe der oberen Theile der Höhenperpendikel in den kleineren Dreiecken AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1, welche durch das Höhendreieck vom ursprünglichen Dreieck abgeschnitten werden, ist gleich der Differenz der Durchmesser des dem ursprünglichen Dreieck umschriebenen und des dem Höhendreieck einbeschriebenen Kreises, d. h.:

$$AO_1 + BO_2 + CO_3 = 2\,(R - \varrho).$$

Beweis.

Da C_1O_1, B_1O auf AC, B_1O_1, C_1O auf AB senkrecht stehen, so ist die Figur $B_1OC_1O_1$ ein Parallelogramm, mithin $O_1\alpha = O\alpha_1 = \varrho$ und $AO_1 = \varrho_1 - \varrho$. Eben so

$$BO_2 = \varrho_2 - \varrho$$
$$CO_3 = \varrho_3 - \varrho.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} AO_1 + BO_2 + CO_3 &= (\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3) - 3\varrho \\ &= 2R + \varrho - 3\varrho \text{ (s. Lehrs. XIII)} \\ &= 2\,(R - \varrho). \end{aligned}$$

Lehrsatz LIII.

Figur 11.

Der untere Theil jedes Höhenperpendikels ist die mittlere Proportionale zwischen den oberen Theilen der von den beiden anderen Ecken ausgehenden Höhenperpendikel in den kleineren Dreiecken AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1, welche durch das Höhendreieck abgeschnitten werden, d. h.:

$$BO_2 : A_1O = A_1O : CO_3$$
$$AO_1 : B_1O = B_1O : CO_3$$
$$AO_1 : C_1O = C_1O : BO_2$$

Beweis.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $BC_1\beta$, A_1C_1y, $AC_1\alpha$, $B_1C_1b_1$ folgt die Aehnlichkeit der Dreiecke BO_2A_1 und B_1O_1A und hieraus

$$BO_2 : A_1O_2 = B_1O_1 : AO_1.$$

Nun ist aber sowohl $A_1O_2C_1O$ als $B_1OC_1O_1$ ein Parallelogramm, daher $A_1O_2 = C_1O = B_1O_1$, mithin

$BO_2 : C_1O = C_1O : AO_1$ oder, was dasselbe
$AO_1 : C_1O = C_1O : BO_2$. Eben so erhält man
$AO_1 : B_1O = B_1O : CO_3$ und
$BO_2 : A_1O = A_1O : CO_3$.

Zusatz.

Aus unserem Lehrsatz folgt

$$A_1O^2 = BO_2.CO_3$$
$$B_1O^2 = AO_1.CO_3$$
$$C_1O^2 = AO_1.BO_2$$

mithin

$$A_1O.B_1O.C_1O = AO_1.BO_2.CO_3$$

d. h. das Produkt aus den unteren Theilen der Höhenperpendikel im ursprünglichen Dreieck ABC ist gleich dem Produkt aus den oberen Theilen der von den Ecken A, B, C auf die Seiten des Höhendreiecks $A_1B_1C_1$ gefällten Senkrechten, diese oberen Theile von den Ecken bis zum Durchschnitt der Höhenperpendikel in den partiellen Dreiecken AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1 gerechnet.

Lehrsatz LIV.

Die Summe der Quadrate der oberen Theile der Höhenperpendikel im ursprünglichen Dreieck ABC ist gleich dem Rechteck aus dem Durchmesser des umschriebenen Kreises in die Summe der Abstände der Ecken des Dreiecks von den Durchschnittspunkten der Höhenperpendikel in den partiellen Dreiecken AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1, welche durch das Höhendreieck abgeschnitten werden, d, h.

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 = 2R\,(AO_1 + BO_2 + CO_3).$$

Beweis.

Nach Lehrsatz XLV ist

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 = 4R\,(R - \varrho).$$

Nach Lehrs. LII aber

$$AO_1 + BO_2 + CO_3 = 2\,(R - \varrho)$$

Hieraus folgt

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 = 2R\,(AO_1 + BO_2 + CO_3).$$

Lehrsatz LV.

Die Summe der Quadrate der Abstände der Ecken des Dreiecks von den Punkten O_1, O_2, O_3 ist gleich dem Quadrat vom Durchmesser des umschriebenen Kreises sammt dem doppelten Quadrat vom Halbmesser des dem Höhendreieck einbeschriebenen Kreises, weniger dem doppelten Quadrat vom halben Umfang dieses Dreiecks, d. h.:

$$AO_1^2 + BO_2^2 + CO_3^2 = 4R^2 + 2\,(\varrho^2 - s_1^2).$$

Beweis.

Es ist (Lehrs. LII)

$$(AO_1 + BO_2 + CO_3)^2 = AO_1^2 + BO_2^2 + CO_3^2 + 2(AO_1.BO_2 + AO_1CO_3 + BO_2CO_3) = 4\,(R - \varrho)^2.$$

Nach Lehrs. LIII, Zusatz, und Lehrs. LI ist aber

$$AO_1.BO_2 + AO_1.CO_3 + BO_2.CO_3 = A_1O^2 + B_1O^2 + C_1O^2 = s_1^2 - \varrho\,(4R - \varrho).$$

Hieraus folgt

$$AO_1^2 + BO_2^2 + CO_3^2 = 4R^2 + 2\,(\varrho^2 - s_1^2).$$

Lehrsatz LVI.

Figur 13.

Das Rechteck aus dem unteren Pfeile irgend einer Dreiecksseite in das um den Durchmesser des einbeschriebenen Kreises verminderte Höhenperpendikel derselben Seite ist gleich dem Quadrat vom Radius des einbeschriebenen Kreises, d. h.

$$EH.AL = r^2.$$

Beweis.

Nach Lehrs. XVII, Zusatz 3 ist

$$h_1 = \frac{2rr_1}{r_1 - r}, \text{ mithin}$$

$$\left(\frac{r_1 - r}{2}\right) h_1 = rr_1. \text{ Ferner ist}$$

$$\left(\frac{r_1 - r}{2}\right) 2r = r\,(r_1 - r)$$

Hieraus folgt

$$\left(\frac{r_1 - r}{2}\right) (h_1 - 2r) = r^2,$$

oder, was dasselbe

$$EH.AL = r^2. \text{ —}$$

Lehrsatz LVII.

Figur 13.

Das Rechteck aus dem unteren Pfeile irgend einer Dreiecksseite in das um den Durchmesser des entsprechenden auswärts tangirenden Kreises vermehrte Höhenperpendikel derselben Seite ist gleich dem Quadrat vom Radius jenes auswärts berührenden Kreises, d. h..

$$EH\,(h_1 + 2r_1) = r_1^2. \text{ —}$$

Beweis.

Es ist

$$\left(\frac{r_1 - r}{2}\right) h_1 = rr_1 \text{ und}$$

$$\left(\frac{r_1 - r}{2}\right) 2r_1 = r_1\,(r_1 - r)$$

mithin

$$\left(\frac{r_1 - r}{2}\right)(h_1 + 2r_1) = r_1^2$$

oder, was dasselbe

$$EH\,(h_1 + 2r_1) = r_1^2. \text{ —}$$

Zusatz.

$$\text{Da } h_1 = \frac{2rr_1}{r_1 - r}$$

$$\text{und } h_1 - 2r = \frac{2r^2}{r_1 - r}$$

so ist

$$h_1 - 2r : h_1 = r : r_1. \text{ Eben so}$$
$$h_2 - 2r : h_2 = r : r_2$$
$$h_3 - 2r : h_3 = r : r_3.$$

Ferner ist

$$h_1 + 2r_1 = \frac{2r_1^2}{r_1 - r}$$

mithin auch

$$h_1 : h_1 + 2r_1 = r : r_1. \text{ Eben so}$$
$$h_2 : h_2 + 2r_2 = r : r_2$$
$$h_3 : h_3 + 2r_3 = r : r_3.$$

Auch hat man noch:

$$h_1 - 2r : h_1 + 2r_1 = r^2 : r_1^2$$
$$h_2 - 2r : h_2 + 2r_2 = r^2 : r_2^2$$
$$h_3 - 2r : h_3 + 2r_3 = r^2 : r_3^2.$$

Da ferner

$$r : r_1 = AS : AS_1$$
$$r : r_2 = BS : BS_2$$
$$r : r_3 = CS : CS_3$$

und $AS.BS.CS = 4Rr^2$ (Lehrs. XXVI)

$AS_1BS_2CS_3 = 4Rs^2$ (Lehrs. XXVII)

so ist:

$$(h_1 - 2r)(h_2 - 2r)(h_3 - 2r) : (h_1 + 2r_1)(h_2 + 2r_2)(h_3 + 2r_3) = r^4 : s^4$$

d. h.: Das Produkt derjenigen drei Faktoren, welche man erhält, indem man von jedem Höhenperpendikel den Durchmesser des einbeschriebenen Kreises abzieht, verhält sich zum Produkt derjenigen drei Faktoren, welche entstehen, wenn man zu jedem Höhenperpendikel den Durchmesser des entsprechenden auswärts berührenden Kreises addirt, wie die vierte Potenz vom Radius des einbeschriebenen Kreises zur vierten Potenz vom halben Umfang des Dreiecks.

Vierter Abschnitt.

Die Distanzen der wichtigsten Punkte im Dreieck.

Hülfssatz.

Figur 10, a und b.

Zieht man in einem gleichschenkeligen Dreieck ZAE eine Gerade ZS aus dem Scheitel Z nach einem beliebigen Punkt S der Grundlinie AE oder deren Verlängerung, so ist das Quadrat dieser Geraden gleich dem Quadrate einer der gleichen Seiten des Dreiecks, minus oder plus dem Rechteck aus den beiden Abschnitten der Grundlinie, d. h.:

$$ZS^2 = ZA^2 \mp AS.ES.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} ZS^2 &= ZG^2 \mp GS^2 \\ &= ZA^2 \mp AS.ES. \end{aligned}$$

Lehrsatz LVIII.

Figur 10.

Das Quadrat vom Abstande des Mittelpunkts des umschriebenen Kreises von dem Mittelpunkte eines der vier tangirenden Kreise ist gleich dem Quadrate vom Radius des umschriebenen Kreises, minus oder plus dem doppelten Rechteck aus diesem Radius in den Radius des betreffenden tangirenden Kreises, und zwar minus für den einbeschriebenen, plus für die auswärts berührenden Kreise, d. h.:

$$\begin{aligned} ZS^2 &= R^2 - 2Rr \\ ZS_1^2 &= R^2 + 2Rr_1 \\ ZS_2^2 &= R^2 + 2Rr_2 \\ ZS_3^2 &= R^2 + 2Rr_3. \end{aligned}$$

Beweis.

Im Dreieck ZAE ist vermöge des vorigen Hülfssatzes

$$ZS^2 = ZA^2 - AS.ES.$$

Aber $\quad ZA = R$

$AS.ES = 2Rr$ (Lehrs. XXXIV), mithin

$$ZS^2 = R^2 - 2Rr.$$

Eben so ist

$$ZS_1^2 = ZA^2 + AS_1.ES_1.$$

Aber $AS_1.ES_1 = 2Rr_1$ (Lehrs. XXXIV).

Demnach

$ZS_1^2 = R^2 + 2Rr_1$. Eben so hat man

$$ZS_2^2 = R^2 + 2Rr_2$$

$$ZS_3^2 = R^2 + 2Rr_3.$$

Zusatz 1.

Addirt man diese vier Werthe, so erhält man mit Berücksichtigung von Lehrs. XIII:

$$ZS^2 + ZS_1^2 + ZS_2^2 + ZS_3^2 = 12R^2$$

d. h.: Die Summe der Quadrate der Abstände vom Mittelpunkte des umschriebenen Kreises zu den Mittelpunkten sämmtlicher tangirenden Kreise ist gleich dem dreifachen Quadrat vom Durchmesser des umschriebenen Kreises.

Da ferner $VS_1 = VS_2 = VS_3 = 2R$, so ist auch

$$ZS^2 + ZS_1^2 + ZS_2^2 + ZS_3^2 = VS_1^2 + VS_2^2 + VS_3^2.$$

Zusatz 2.

Da $VS = 2ZS$ (Lehrs. XXII, Zus. 1),

so ist $VS^2 = 4(R^2 - 2Rr)$

d. h.: Das Quadrat des Abstandes vom Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises zum Mittelpunkte desjenigen Kreises, welcher durch die drei Mittelpunkte der auswärts tangirenden Kreise geht, ist gleich dem Quadrat vom Durchmesser des umschriebenen Kreises, weniger dem doppelten Rechteck aus dem Durchmesser des um- und einbeschriebenen Kreises. —

Zusatz 3.

Da $VS_1^2 = VS_2^2 = VS_3^2 = 4R^2$ (Lehrs. XXII),

so hat man mit Berücksichtigung von Zus. 2:

$$VS^2 + VS_1^2 + VS_2^2 + VS_3^2 = 8R(2R - r).$$

Aber nach Lehrs. XXIX, Zusatz

$$SS_1^2 + SS_2^2 + SS_3^2 = 8R(2R - r).$$

Hieraus folgt:

$$VS^2 + VS_1^2 + VS_2^2 + VS_3^2 = SS_1^2 + SS_2^2 + SS_3^2$$

d. h.: Die Summe der Quadrate der Abstände von den Mittelpunkten der vier tangirenden Kreise zum Mittelpunkt desjenigen Kreises, welcher durch die Mittelpunkte der drei auswärts tangirenden Kreise geht, ist gleich der Summe der Quadrate der Abstände vom Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises zu den Mittelpunkten der drei auswärts berührenden Kreise. —

Zusatz 4.

Weil W der Schwerpunkt des Dreiecks $S_1S_2S_3$ ist, so hat man (Lehrs. XXII, Zus. 2)

$$VW = \frac{1}{3}VS$$
$$ZW = \frac{1}{6}VS$$
$$SW = \frac{2}{3}VS$$

mithin, mit Rücksicht auf Zusatz 2:

$$VW^2 = \frac{4}{9}(R^2 - 2Rr)$$
$$ZW^2 = \frac{1}{9}(R^2 - 2Rr)$$
$$SW^2 = \frac{16}{9}(R^2 - 2Rr)$$

Lehrsatz LIX.

Figur 10.

Der Abstand der Mitte einer Seite von dem auf derselben Seite liegenden Berührungspunkt des einbeschriebenen Kreises ist die mittlere Proportionale zwischen dem dieser Seite zugehörigen unteren Pfeile und dem entsprechenden um das zugehörige Höhenperpendikel verminderten oberen Pfeile, d. h.:

$$EH : Hs = Hs : DP_1.$$

Beweis.

Da ADEC ein Viereck im Kreise ist, so ist

$$\angle ADP_1 = \angle ECQ_1$$
$$\angle DAN = \angle HEC.$$

Hieraus folgt die Aehnlichkeit der Dreiecke

ADP_1 und ECQ_1

ADN und ECH.

Demnach ist

$$DP_1 : AD = CQ_1 : CE$$
$$AD : AN = CE : EH,$$

mithin

$$DP_1 : AN = CQ_1 : EH.$$

Aber $CQ_1 = AN = \frac{c - b}{2}$ | $C'Q_1 = \frac{AT - AC'}{2} = \frac{c-b}{2}$

$$Hs = \tfrac{1}{2} ss_1 = \frac{c - b}{2} \text{(Lehrs. XXI Zus.)}$$

mithin

$$CQ_1 = AN = Hs.$$

Hieraus folgt

$$EH : Hs = Hs : DP_1.$$

Zusatz 1.

Da $EH = \frac{r_1 - r}{2}$

$Hs = \frac{c - b}{2}$ ist

so erhält man:

$$DP_1 = \frac{(c - b)^2}{2(r_1 - r)}.$$

Zusatz 2.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke

DHC und AQ_1E
DCN und AEP_1

folgt:

$$DH : CD = AQ_1 : AE$$
$CD : CN = AE : EP_1$, mithin ex æquo

$$DH : CN = AQ_1 : EP_1$$

oder da $CN = AQ_1 = \frac{b + c}{2}$

$DH.EP_1 = \left(\frac{b + c}{2}\right)^2$. Nach unserem Lehrsatz ist aber

$$EH.DP_1 = \left(\frac{c - b}{2}\right)^2.$$

Ferner

$$DH.EH = BH^2$$
$$EP_1.DP_1 = AP_1^2.$$

Hieraus folgt

$$BH.AP_1 = CH.AP_1 = \tfrac{1}{4}(c^2 - b^2).$$

Lehrsatz LX.

Figur 13.

Das Produkt des Abstandes vom Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises zu irgend einem Höhenperpendikel des Dreiecks plus dem Rechteck aus dem unteren Theile dieses Höhenperpendikels in die Differenz desselben Höhenperpendikels und des Durchmessers vom einbeschriebenen Kreise ist gleich dem Quadrat vom Radius des einbeschriebenen Kreises, d. h.

$$SQ^2 + A_1O.AL = r^2.$$

Beweis.

Es ist

$$AS : AS_1 = r : r_1$$
$$= SF : S_1s_1$$

mithin sind die Punkte A, F, s_1 in gerader Linie, ferner liegt S in der Mitte von Fs, H in der Mitte von ss_1; daher ist

$$SH \parallel As_1 \text{ und}$$
$$AL : FL = Ss : Hs, \text{ ferner (Lehrs. LVI)}$$
$$r : AL = EH : r.$$

Da nun $Ss = r$, so folgt

$$r : FL = EH : Hs \text{ oder}$$
$$SF : FL = EH : Hs$$

mithin $Es \parallel SL$

Da nun auch $sQ \parallel FL$

so liegen die Punkte

$$E, s, Q$$

in gerader Linie. Hieraus folgt

$$Hs : EH = SQ : Ss, \text{ mithin,}$$

da $Ss = r$,

$$Hs^2 : EH^2 = SQ^2 : r^2$$

Aber $Hs^2 = EH.DP$ (Lehrs. LIX), folglich

$$DP : EH = SQ^2 : r^2.$$

Nun ist aber

$$DP = DH - h_1$$
$$= AO + EH - h_1 \text{ (Lehrs. XX, Zus. 1)}$$

mithin

$$AO + EH - h_1 : EH = SQ^2 : r^2, \text{ folglich auch}$$
$$EH : h_1 - AO = r^2 : r^2 - SQ^2 \text{ oder}$$
$$EH : A_1O = r^2 : r^2 - SQ^2.$$

Hieraus folgt

$$\frac{r^2}{EH} = \frac{r^2 - SQ^2}{A_1O}$$

Aber

$$\frac{r^2}{EH} = AL \text{ (Lehrs. LVI)}$$

mithin

$$AL.A_1O = r^2 - SQ^2 \text{ und}$$
$$SQ^2 + A_1O.AL = r^2. -$$

Lehrsatz LXI.

Figur 13.

Das Quadrat der Distanz vom Durchschnittspunkt der Höhenperpendikel zum Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises ist gleich dem doppelten Quadrat vom Halbmesser des einbeschriebenen Kreises weniger dem Rechteck aus dem Durchmesser des umschriebenen in den Radius des dem Höhendreieck einbeschriebenen Kreises, d. h.

$$OS^2 = 2r^2 - 2R\varrho.$$

Beweis

Es ist

$$OS^2 = SL^2 - A_1O.LO$$
$$= r^2 + SQ^2 - A_1O\ (AO - AL)$$
$$= r^2 - AO.A_1O + SQ^2 + A_1O.AL$$

Aber $SQ^2 + A_1O.AL = r^2$, (Lehrs. LX), demnach

$$OS^2 = 2r^2 - 2R\varrho. \text{ (Siehe Lehrs. XLVII Beweis).}$$

Lehrsatz LXII.

Das Quadrat der Distanz vom Durchschnittspunkt der Höhenperpendikel zum Mittelpunkt eines der drei auswärts berührenden Kreise ist gleich dem doppelten Quadrat vom Halbmesser dieses Kreises weniger dem Rechteck aus dem Durchmesser des umschriebenen in den Radius des dem Höhendreieck einbeschriebenen Kreises, d. h.

$$OS_1^2 = 2r_1^2 - 2R\varrho.$$
$$OS_2^2 = 2r_2^2 - 2R\varrho.$$
$$OS_3^2 = 2r_3^2 - 2R\varrho.$$

Beweis.

Verlängert man AA_1 über A_1 hinaus um $2r_1$, nennt den Endpunkt dieser Geraden A_2, und verbindet S_1 mit A_1 und A_2, so ist

$$OS_1^2 = A_1S_1^2 + A_1O\,(A_1O + 2r_1)\quad (\text{S. X77.})$$
$$= r_1^2 + S_1Q_1^2 + A_1O\,(h_1 + 2r_1 - AO)$$
$$= r_1^2 + S_1Q_1^2 + A_1O\,(h_1 + 2r_1) - AO.A_1O$$

Nun ist aber

$$S_1Q_1 : SQ = AS_1 : AS$$
$$= r_1 : r$$

mithin

$$S_1Q_1 = \frac{r_1.SQ}{r} \text{ und}$$

$$S_1Q_1^2 = \frac{r_1^2.SQ^2}{r^2}$$

Da nun nach Lehrs. LVII

$$h_1 + 2r_1 = \frac{r_1^2}{EH}, \text{ so hat man}$$

$$S_1Q_1^2 + A_1O\,(h_1 + 2r_1) = r_1^2\left(\frac{SQ^2}{r^2} + \frac{A_1O}{EH}\right)$$

Nach dem Beweis zu Lehrs. LX ist aber

$$\frac{SQ^2}{r^2} = \frac{AO + EH - h_1}{EH}, \text{ mithin}$$

$$\frac{SQ^2}{r^2} + \frac{A_1O}{EH} = \frac{AO + A_1O - h_1 + EH}{EH}$$

oder, da $AO + A_1O = h_1$ ist

$$\frac{SQ^2}{r^2} + \frac{A_1O}{EH} = 1$$

Hieraus folgt

$$S_1Q_1^2 + A_1O\,(h_1 + 2r_1) = r_1^2$$

Daher, da $AO.A_1O = 2R\varrho$ (X.67),

$$OS_1^2 = 2r_1^2 - 2R\varrho. \text{ Eben so findet man}$$
$$OS_2^2 = 2r_2^2 - 2R\varrho.$$
$$OS_3^2 = 2r_3^2 - 2R\varrho.$$

Zusatz 1.

Aus Lehrs. LXI und Lehrs. LXII folgt:

$$OS^2 + OS_1^2 + OS_2^2 + OS_3^2 = 2(r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) - 8R\varrho$$

Aber nach Lehrs. XLVI Zusatz

$$r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 8R^2 - 4R\varrho$$

mithin

$$OS^2 + OS_1^2 + OS_2^2 + OS_3^2 = 16R\,(R - \varrho)$$

d. h.: Der Durchschnittspunkt der Höhenperpendikel liegt so, daß die Summe der Quadrate seiner Abstände von den Mittelpunkten der vier tangirenden Kreise gleich ist dem Rechtecke aus dem achtfachen Durchmesser des umschriebenen Kreises in den Ueberschuß vom Radius dieses Kreises über den Radius des dem Höhendreieck einbeschriebenen Kreises.

Zusatz 2.

Bezeichnet man die Mittelpunkte der das Dreieck $S_1S_2S_3$ tangirenden Kreise mit $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, und die Radien dieser Kreise mit $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$ so ist

$$\mathfrak{S}S^2 = 2\mathfrak{R}^2 - 4Rr$$
$$\mathfrak{S}_1S^2 = 2\mathfrak{R}_1^2 - 4Rr$$
$$\mathfrak{S}_2S^2 = 2\mathfrak{R}_2^2 - 4Rr$$
$$\mathfrak{S}_3S^2 = 2\mathfrak{R}_3^2 - 4Rr.$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{S}S^2 + \mathfrak{S}_1S^2 + \mathfrak{S}_2S^2 + \mathfrak{S}_3S^2 = 2\,(\mathfrak{R}^2 + \mathfrak{R}_1^2 + \mathfrak{R}_2^2 + \mathfrak{R}_3^2) - 16Rr. -$$

Aber nach Lehrs. XLVI, Zusatz, und Lehrs. XXII

$$\mathfrak{R}^2 + \mathfrak{R}_1^2 + \mathfrak{R}_2^2 + \mathfrak{R}_3^2 = 32R^2 - 8Rr$$

mithin

$$\mathfrak{S}S^2 + \mathfrak{S}_1S^2 + \mathfrak{S}_2S^2 + \mathfrak{S}_3S^2 = 32R\,(2R - r).$$

Nun ist nach Lehrs. XXIX, Zus.

$$SS_1^2 + SS_2^2 + SS_3^2 = 8R\,(2R - r)$$

folglich

$$\mathfrak{S}S^2 + \mathfrak{S}_1S^2 + \mathfrak{S}_2S^2 + \mathfrak{S}_3S^2 = 4\,(SS_1^2 + SS_2^2 + SS_3^2)$$

d. h.: Der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises liegt so, daß die Summe der Quadrate seiner Abstände von den Mittelpunkten der vier das Dreieck $S_1S_2S_3$ tangirenden Kreise gleich ist der vierfachen Summe der Quadrate aus den Abständen vom Mittelpunkte des einbeschriebenen zu den Mittelpunkten der drei auswärts berührenden Kreise.

Da ferner (Lehrsatz LVIII, Zusatz 3)

$$SS_1^2 + SS_2^2 + SS_3^2 = VS^2 + VS_1^2 + VS_2^2 + VS_3^2),$$

so ist auch

$$\mathfrak{S}S^2 + \mathfrak{S}_1S^2 + \mathfrak{S}_2S^2 + \mathfrak{S}_3S^2 = 4\,(VS^2 + VS_1^2 + VS_2^2 + VS_3^2)$$

d. h.: Der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises liegt so, daß die Summe der Quadrate seiner Abstände von den Mittelpunkten der vier das Dreieck $S_1S_2S_3$ tangirenden Kreise gleich ist der vierfachen Summe

der Quadrate aus den Abständen vom Mittelpunkte des dem Dreieck $S_1S_2S_3$ umschriebenen Kreises zu sämmtlichen Mittelpunkten der vier das ursprüngliche Dreieck tangirenden Kreise. —

Lehrsatz LXIII.

Figur 10.

Das Quadrat des Abstandes vom Durchschnittspunkt der Höhenperpendikel zum Mittelpunkte des umschriebenen Kreises ist gleich dem Quadrat vom Halbmesser dieses Kreises weniger dem vierfachen Rechteck aus diesem Halbmesser in den Halbmesser des dem Höhendreieck einbeschriebenen Kreises, d. h.:

$$OZ^2 = R^2 - 4R\varrho.$$

Beweis.

Zieht man die Geraden A_1Z und O_1Z, so ist in dem Dreieck ZAO_1:

$$OZ^2 = AZ^2 - AO.O_1O.$$ (Lhs. X.77.)

Nun ist $O_1O = 2A_1O$ (Lehrs. XXXVII, Beweis)

und $AO.A_1O = 2R\varrho$ (Lehrs. XLVII, Beweis)

mithin

$$OZ^2 = R^2 - 4R\varrho. —$$

Zusatz 1.

Bezeichnet man den Mittelpunkt des dem Höhendreieck $A_1B_1C_1$ umschriebenen Kreises mit Z_1, so ist $OZ_1 = \frac{1}{2}OZ$ (Lehrs. XXII, Zus. 1) mithin

$$OZ_1^2 = \frac{1}{4}R^2 - R\varrho$$

d. h.: Das Quadrat des Abstandes vom Durchschnittspunkte der Höhenperpendikel zum Mittelpunkt des dem Höhendreieck umschriebenen Kreises ist gleich dem Quadrate vom Halbmesser des dem Höhendreieck umschriebenen Kreises, weniger dem doppelten Rechteck aus diesem Halbmesser in den Halbmesser des dem Höhendreieck einbeschriebenen Kreises. — Dieselbe Folgerung geht aus Lehrs. LVIII hervor, indem O der Mittelpunkt des dem Höhendreieck einbeschriebenen Kreises ist. —

Zusatz 2.

Da Z in der Mitte von VS liegt, so ist in dem Dreieck OSV:

$$OS^2 + OV^2 = 2OZ^2 + 2SZ^2, \text{ mithin}$$

$$OV^2 = 2OZ^2 + 2SZ^2 - OS^2.$$

Aber $OZ^2 = R^2 - 4R\varrho$
$$SZ^2 = R^2 - 2Rr \text{ (Lehrs. LVIII)}$$
$$OS^2 = 2r^2 - 2R\varrho \text{ (Lehrs. LXI).}$$

Substituirt man diese Werthe, so erhält man für das Quadrat der Distanz vom Durchschnittspunkt der Höhenperpendikel bis zum Mittelpunkte des dem Dreieck $S_1S_2S_3$ umschriebenen Kreises den Ausdruck:

$$OV^2 = 4R\,(R - r) - 2\,(3R\varrho + r^2). \text{ —}$$

Zusatz 3.

Bezeichnet man den Schwerpunkt des Dreiecks ABC mit G, so ist nach Lehrs. XXII, Zus. 2:

$$ZG = {}^1\!/_3 OZ$$
$$Z_1G = {}^1\!/_6 OZ$$
$$OG = {}^2\!/_3 OZ.$$

Hieraus folgt

$$ZG^2 = \tfrac{1}{9}\,(R^2 - 4R\varrho).$$
$$Z_1G^2 = \tfrac{1}{36}\,(R^2 - 4R\varrho).$$
$$OG^2 = \tfrac{4}{9}\,(R^2 - 4R\varrho).$$

Lehrsatz LXIV.

Der Mittelpunkt Z_1 des dem Höhendreieck umschriebenen Kreises ist vom Mittelpunkt S des dem ursprünglichen Dreieck umschriebenen Kreises um die Differenz der Radien dieser Kreise, hingegen von jedem Mittelpunkt S_1, (S_2, S_3) eines das ursprüngliche Dreieck auswärts tangirenden Kreises um die Summe der entsprechenden Radien beider Kreise entfernt, d. h.

$$Z_1S = {}^1\!/_2 R - r$$
$$Z_1S_1 = {}^1\!/_2 R + r_1$$
$$Z_1S_2 = {}^1\!/_2 R + r_2$$
$$Z_1S_3 = {}^1\!/_2 R + r_3.$$

Beweis.

Da Z_1 in der Mitte von OZ liegt, (Lehrs. XXII) so ist in dem Dreieck SOZ

$$2Z_1S^2 + 2OZ_1^2 = ZS^2 + OS^2$$

mithin

$$Z_1S^2 = {}^1\!/_2\,(ZS^2 + OS^2) - OZ_1^2$$

Aber

$$ZS^2 = R^2 - 2Rr \text{ (Lehrs. LVIII)}$$
$$OS^2 = 2r^2 - 2R\varrho \text{ (Lehrs. LXI)}$$
$$OZ_1^2 = \tfrac{1}{4}R^2 - R\varrho \text{ (Lehrs. LXIII Zus. 1)}$$

Substituirt man diese Werthe, so erhält man:

$$Z_1S^2 = \tfrac{1}{4}R^2 - Rr + r^2, \text{ folglich}$$
$$Z_1S = \tfrac{1}{2}R - r.$$

Eben so ist in dem Dreieck S_1OZ

$$2Z_1S_1^2 + 2OZ_1^2 = ZS_1^2 + OS_1^2$$

mithin

$$Z_1S_1^2 = \tfrac{1}{2}(ZS_1^2 + OS_1^2) - OZ_1^2$$

Nun ist aber

$$ZS_1^2 = R^2 + 2Rr_1 \text{ (Lehrs. LVIII)}$$
$$OS_1^2 = 2r_1^2 - 2R\varrho \text{ (Lehrs. LXII)}$$
$$OZ_1^2 = \tfrac{1}{4}R^2 - R\varrho \text{ (Lehrs. LXIII, Zus. 1),}$$

mithin

$$Z_1S_1^2 = \tfrac{1}{4}R^2 + Rr_1 + r_1^2.$$

Hieraus folgt

$$Z_1S_1 = \tfrac{1}{2}R + r_1. \text{ Eben so hat man}$$
$$Z_1S_2 = \tfrac{1}{2}R + r_2$$
$$Z_1S_3 = \tfrac{1}{2}R + r_3. \text{ —}$$

Zusatz 1

Aus diesem Lehrsatz folgt unmittelbar:

Der dem Höhendreieck $A_1B_1C_1$ umschriebene Kreis (Z_1) berührt sämmtliche vier tangirende Kreise des ursprünglichen Dreiecks, und zwar die auswärts tangirenden von außen, den einbeschriebenen Kreis von innen (umhüllend). —

Zusatz 2.

Aus diesem Lehrsatz folgt ferner:

$$Z_1S + Z_1S_1 + Z_1S_2 + Z_1S_3 = 2R + (r_1 + r_2 + r_3 - r).$$

Aber

$$r_1 + r_2 + r_3 = 4R + r \text{ (Lehrs. XIII)}$$

mithin

$$Z_1S + Z_1S_1 + Z_1S_2 + Z_1S_3 = 6R. \text{ —}$$

d. h.: Die Summe der Abstände vom Mittelpunkt des dem Höhendreieck umschriebenen Kreises zu den Mittelpunkten der vier das ursprüngliche Dreieck tangirenden Kreise ist gleich dem dreifachen Durchmesser des umschriebenen Kreises.

Zusatz 3.

Es ist

$$Z_1S^2 = \frac{1}{4}R^2 - Rr + r^2.$$
$$Z_1S_1^2 = \frac{1}{4}R^2 + Rr_1 + r_1^2.$$
$$Z_1S_2^2 = \frac{1}{4}R^2 + Rr_2 + r_2^2.$$
$$Z_1S_3^2 = \frac{1}{4}R^2 + Rr_3 + r_3^2,$$

mithin, wenn man addirt:

$$Z_1S^2 + Z_1S_1^2 + Z_1S_2^2 + Z_1S_3^2 = R^2 + R(r_1 + r_2 + r_3 - r) + r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2.$$

Aber

$$r_1 + r_2 + r_3 - r = 4R \text{ (Lehrs. XIII)}$$

und $r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 8R^2 - 4R\varrho$ (Lehrs. XLVI).

Hieraus folgt

$$Z_1S^2 + Z_1S_1^2 + Z_1S_2^2 + Z_1S_3^2 = 13R^2 - 4R\varrho.$$

Nun ist nach Lehrs. LVIII, Zus. 1

$$ZS^2 + ZS_1^2 + ZS_2^2 + ZS_3^2 = 12R^2$$

und nach Lehrs. LXIII

$$OZ^2 = 4ZZ_1^2 = R^2 - 4R\varrho.$$

Dies führt zu folgender Relation:

$$Z_1S^2 + Z_1S_1^2 + Z_1S_2^2 + Z_1S_3^2 = ZS^2 + ZS_1^2 + ZS_2^2 + ZS_3^2 + ZO^2$$
$$= ZS^2 + ZS_1^2 + ZS_2^2 + ZS_3^2 + 4ZZ_1^2$$

d. h.: In jedem Dreieck liegen die Mittelpunkte seiner vier berührenden Kreise so, daß die Summe der Quadrate ihrer Abstände vom Mittelpunkt des dem Höhendreieck umschriebenen Kreises gleich ist der Summe der Quadrate ihrer Abstände vom Mittelpunkt des dem ursprünglichen Dreieck umschriebenen Kreises, plus dem vierfachen Quadrate vom Abstande der beiden letzten Mittelpunkte von einander. —

Zusatz 4.

Da ferner Z in der Mitte von SV liegt (Lehrs. XXII), so hat man in dem Dreiecke Z_1SV

$$Z_1V^2 + Z_1S^2 = 2ZZ_1^2 + 2ZS^2$$

mithin

$$Z_1V^2 = 2(ZZ_1^2 + ZS^2) - Z_1S_2$$

Aber $ZZ_1^2 = OZ_1^2 = \frac{1}{4}R^2 - R\varrho$ (Lehrs. LXIII, Zus. 1)

$$ZS^2 = R^2 - 2Rr$$
$$Z_1S^2 = (\tfrac{1}{2}R - r)^2 = \tfrac{1}{4}R^2 - Rr + r^2 \text{ (Lehrs. LXIV)}$$

Hieraus folgt

$$Z_1V^2 = R(\tfrac{9}{4}R - 2\varrho) - r(3R + r)$$

Fünfter Abschnitt.

Aufgaben.

Aufgabe 1.

Es ist ein Dreieck ABC gegeben: man soll die Mittelpunkte seiner vier tangirenden Kreise bestimmen.

Auflösung 1.

Man halbire die inneren und äußeren Winkel des Dreiecks, so erhält man sechs Gerade, welche sich je drei und drei in vier Punkten durchschneiden. Diese vier Durchschnittspunkte sind die gesuchten Mittelpunkte. —

Auflösung 2.

Figur 10.

Man construire den umschriebenen Kreis (Z) des Dreiecks ABC und errichte auf die Mitte einer Seite BC die Senkrechte DE, welche dem umschriebenen Kreise in D und E begegnet. — Man verbinde A mit D und E durch die Geraden AD, AE, und beschreibe aus D und E mit den Radien DB, EB neue Kreise. Diese letzten Kreise schneiden die Geraden AD, AE in den gesuchten Punkten S, S_1, S_2, S_3.

Beweis

folgt aus Lehrsatz X und Lehrsatz XI.

Aufgabe 2.

Von einem Dreieck sind die Mittelpunkte der drei auswärts berührenden Kreise gegeben: Man soll das Dreieck construiren. —

Auflösung.

Figur 10.

Es seien S_1, S_2, S_3 die gegebenen Mittelpunkte; man verbinde dieselben durch Gerade, so erhält man ein Dreieck $S_1S_2S_3$. Zieht man in diesem Dreieck die Höhenperpendikel S_1A, S_2B, S_3C, und verbindet deren Fußpunkte A, B, C durch Gerade, so ist ABC das gesuchte Dreieck. —

Beweis

folgt aus Lehrs. X.

Aufgabe 3.

Figur 14.

Von einem Dreieck kennt man eine Seite BC, den ihr gegenüber liegenden Winkel A und den Radius r des einbeschriebenen Kreises: man soll das Dreieck construiren.

Auflösung.

Man beschreibe den Kreis (Z), in welchem BC als Sehne den gegebenen Winkel A über sich hat (Euclid III, 33), halbire den Bogen BC in D, und beschreibe aus D mit BD = CD einen zweiten Kreis (D). Sodann ziehe man in der Distanz r von BC die Gerade MN mit BC parallel und bestimme den Durchschnitt S der Geraden MN mit dem Kreise (D). Zieht man nun DS, welche dem Kreise (Z) zum zweitenmal in A begegnet, und endlich AB, AC, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Zusatz.

Da MN dem Kreise (D) in zwei Punkten begegnet, so erhält man zwei Dreiecke ABC, A_1BC, welche beide den Bedingungen unserer Aufgabe genügen. — Diese Dreiecke sind zugleich congruent und unterscheiden sich durch nichts, als die Lage. — Schneidet MN den Kreis (D) nicht, so ist die Aufgabe unmöglich.

Aufgabe 4.

Figur 15.

Von einem Dreiecke ist die Grundlinie BC, der der Grundlinie gegenüberliegende Winkel A und die Summe der beiden anderen Seiten gegeben: man soll das Dreieck construiren.

Auflösung.

Man beschreibe über BC als Sehne einen Kreis (Z), welcher den gegebenen Winkel faßt, errichte in der Mitte von BC ein Perpendikel und verlängere dasselbe, bis es dem Umfange des Kreises (Z) in D und E begegnet. Von D beschreibe man mit DB als Radius einen zweiten Kreis (D), und aus B oder C als Mittelpunkt einen dritten Kreis, dessen Radius die gegebene Summe BF der beiden anderen Seiten ist. Die Durchschnitte des zweiten und dritten Kreises verbinde man mit den Punkten B und C, und bezeichne die Punkte A, A_1, in welchem diese Verbindungslinien dem Umfange des Kreises (Z) begegnen. Zieht man nun noch AC, A_1C, so erhält man zwei Dreiecke ABC, A_1BC, welche beide die Bedingungen unserer Aufgabe erfüllen.

Beweis.

Es ist einzig zu zeigen, daß

$$AB + AC = BF$$

ist. Nun hat man

$$\angle BFC = \tfrac{1}{2} \text{ arc } (BC) = \tfrac{1}{2} \angle BDC.$$

Aber $\angle BDC = \angle BAC$. Daher auch

$$\angle BFC = \tfrac{1}{2} \angle BAC.$$

Ferner ist

$$\angle BAC = \angle BFC + \angle ACF$$

Hieraus folgt

$$\angle ACF = \tfrac{1}{2} \angle BAC$$

mithin

$$\angle ACF = \angle AFC$$

und $AF = AC,$

folglich auch

$$AB + AC = AB + AF$$
$$= BF$$

wie verlangt wurde. —

Aufgabe 5.

Figur 16.

Von einem Dreieck ist die Grundlinie BC, der der Grundlinie gegenüberliegende Winkel A, und der Unterschied der beiden anderen Seiten gegeben: man soll das Dreieck construiren. —

Auflösung.

Man beschreibe über BC als Sehne einen Kreis (Z), welcher den gegebenen Winkel faßt, halbire den Bogen BC in E und beschreibe aus E als Mittelpunkt mit EB = EC als Radius einen zweiten Kreis (E).

Sodann beschreibe man aus B oder C als Mittelpunkt mit dem gegebenen Unterschied der Seiten BF als Radius einen dritten Kreis, welcher den Kreis (E) in F, F_1 durchschneidet. — Man ziehe BF, BF_1, und verlängere dieselben, bis sie dem Kreise (Z) zum zweitenmal in A, A_1 begegnen. Zieht man nun noch AC, A_1C so erhält man zwei Dreiecke ABC, A_1BC, welche beide der Aufgabe Genüge thun. —

Beweis.

Es ist einzig zu zeigen, daß

$$AB - AC = BF$$

ist. Nun ist aber

$$\text{arc.}BE = \text{arc.}CE$$

mithin

$$AF = AC \text{ (Euclid III, 3)}$$

Hieraus folgt

$$AB - AC = AB - AF$$
$$= BF,$$

wie verlangt wurde. —

Aufgabe 6.

Figur 10.

Von einem Dreieck ist eine Seite a, die Summe der beiden anderen b + c und der Radius r des einbeschriebenen Kreises gegeben: man soll das Dreieck construiren. —

Auflösung.

Nach Lehrsatz XXI ist

$$AM = \frac{b + c - a}{2}.$$

Ferner ist

$$SM = r,$$

mithin kennt man vom rechtwinkeligen Dreieck ASM beide Katheten. Dadurch ist das Dreieck ASM, und in diesem Dreieck der Winkel SAM bestimmt.

Da nun $\angle$ SAM = ½ $\angle$ BAC, so kennt man vom Dreieck ABC

eine Seite, den ihr gegenüberliegenden Winkel und die Summe der beiden anderen Seiten, folglich ist unsere Aufgabe auf Aufgabe 4 zurückgeführt.

Aufgabe 7.

Von einem Dreieck ist der Umfang, ein Höhenperpendikel h_1, und der Radius r des einbeschriebenen Kreises gegeben: man soll das Dreieck construiren. —

Auflösung.

Man suche zu dem gegebenen Höhenperpendikel h_1, zum Umfang $2s$ des Dreiecks und dem Radius r des einbeschriebenen Kreises die vierte Proportionale, so daß

$$h_1 : 2s = r : a,$$

so ist a eine Seite des Dreiecks.

Man kennt demnach vom gesuchten Dreieck eine Seite a, die Summe der beiden anderen $b + c$, und den Radius r des einbeschriebenen Kreises, mithin ist diese Aufgabe auf Aufgabe 6 zurückgeführt. —

Aufgabe 8.

Von einem Dreieck ist eine Seite a, das zu dieser Seite gehörige Höhenperpendikel h_1, und der Radius r des einbeschriebenen Kreises gegeben: man soll das Dreieck construiren.

Auflösung.

Man suche zum Radius r des einbeschriebenen Kreises, zu der gegebenen Seite a und dem zugehörigen Höhenperpendikel h_1 die vierte Proportionale, so daß

$$r : a = h_1 : 2s$$

so ist $2s$ der Umfang des Dreiecks.

Man kennt demnach vom gesuchten Dreieck eine Seite, die Summe der beiden anderen und den Radius des einbeschriebenen Kreises, mithin ist die Aufgabe auf Aufgabe 6 zurückgeführt. —

Aufgabe 9.

Von einem Dreieck kennt man einen Winkel A, das vom Scheitel dieses Winkels auslaufende Höhenperpendikel h_1 und den Radius r des einbeschriebenen Kreises: man soll das Dreieck construiren. —

Auflösung.

Figur 17.

Da $\angle MAS = \frac{1}{2} \angle BAC$,
und $SM = r$,
so kennt man im Dreieck AMS sämmtliche Winkel und eine Cathete MS, d. h. das Dreieck AMS ist vollständig bestimmt.

Man construire demnach das Dreieck AMS und beschreibe über AS als Durchmesser einen Kreis. — Sodann beschreibe man aus A als Mittelpunkt mit der Distanz $h_1 - r$ einen zweiten Kreis, welcher den ersten in E (E_1) schneidet.

Man ziehe nun AE, AE_1, verlängere dieselben nach D, D_1, bis $AD = AD_1 = h_1$ ist, und errichte endlich in D, D_1, auf AD, AD_1 die Senkrechten BC, B_1C_1, so erhält man zwei Dreiecke ABC, AB_1C_1, welche ganz den Bedingungen unserer Aufgabe entsprechen. —

Aufgabe 10.

Von einem Dreieck kennt man eine Seite BC, und die Radien R, r des um- und einbeschriebenen Kreises: man soll das Dreieck construiren.

Auflösung.

Figur 18.

Man construire den umschriebenen Kreis (Z), trage BC als Sehne in demselben auf, halbire den Bogen BC in E und beschreibe aus E als Mittelpunkt mit $EB = EC$ als Radius einen zweiten Kreis (E). Sodann ziehe man in der Distanz r mit BC die Parallele MN, und bezeichne die Punkte S, S_1, in welchen diese Parallele den Kreis (E) durchschneidet. — Man ziehe ES, ES_1, und verlängere dieselben, bis sie dem Kreise (Z) zum zweitenmal in A, A_1 begegnen. Endlich ziehe man noch AB, AC, A_1B, A_1C, so erhält man zwei Dreiecke ABC, A_1BC, welche beide die Bedingungen unserer Aufgabe erfüllen.

Zusatz.

Die Dreiecke ABC, A_1BC sind congruent, und unterscheiden sich durch nichts als die Lage. —

Aufgabe 11.

Figur 19.

Von einem rechtwinkeligen Dreieck kennt man den Radius R des umschriebenen Kreises, so wie die Distanz ZS zwischen den Mittelpunk-

ten des um- und einbeschriebenen Kreises: man soll das Dreieck construiren. —

Auflösung.

Man construire den umschriebenen Kreis (Z), ziehe in demselben den Durchmesser BC, halbire den Bogen BC in E, und beschreibe aus E als Mittelpunkt mit dem Radius EB = EC einen zweiten Kreise (E). Von Z aus beschreibe man mit der gegebenen Distanz ZS einen dritten Kreis, welcher den Kreis (E) in zwei Punkten S, S_1 durchschneidet. Man ziehe ES, ES_1, und verlängere dieselben, bis sie dem Kreise (Z) zum zweitenmal in A, A_1 begegnen. Zieht man nun noch AB, AC, A_1B, A_1C, so erhält man zwei unter sich congruente Dreiecke ABC, A_1BC, welche unserer Aufgabe Genüge thun.

Aufgabe 12.
Figur 12.

Von einem Dreieck ist ein Winkel A, das vom Scheitel dieses Winkels auslaufende Höhenperpendikel h_1, und der Radius R des umschriebenen Kreises gegeben: man soll das Dreieck construiren. —

Auflösung.

Man construire den umschriebenen Kreis (Z), ziehe in demselben einen beliebigen Durchmesser DE und trage an DE in D den Winkel BDE = $\frac{1}{2}$A auf; von B, wo DB dem Kreise (Z) zum zweitenmal begegnet, fälle man auf DE die Senkrechte BC, und ziehe mit BC in der Distanz h_1 die Gerade $A\alpha$ parallel. Sind nun A, α die Durchschnitte dieser Parallele mit dem Kreise (Z), so hat man nur AB, AC, αB, αC zu ziehen; dadurch entstehen zwei unter sich congruente Dreiecke ABC, αBC, welche die Bedingungen unserer Aufgabe erfüllen.

Aufgabe 13.

Von einem Dreieck ist ein Winkel A, das vom Scheitel dieses Winkels ausgehende Höhenperpendikel h_1, und das Rechteck q^2 der den gegebenen Winkel einschließenden Seiten gegeben: man soll das Dreieck construiren. —

Auflösung.

Man suche zu dem gegebenen Höhenperpendikel h_1 und den beiden Seiten m, n des gegebenen Rechtecks (q^2) die vierte geometrische Proportionale 2R, so daß

$$h_1 : m = n : 2R \text{ oder, was dasselbe, }$$
$$2R.h_1 = mn = q^2 \text{ ist. —}$$

Alsdann ist $2R$ der Durchmesser des umschriebenen Kreises (Lehrs. IV, Zusatz).

Man kennt demnach von dem gesuchten Dreieck einen Winkel A, das vom Scheitel dieses Winkels auslaufende Höhenperpendikel h_1 und den Radius R des umschriebenen Kreises, mithin ist unsere Aufgabe auf Aufgabe 12 zurückgeführt.

Aufgabe 14.

Von einem Dreieck ist eine Seite BC, der dieser Seite gegenüberliegende Winkel A und das Rechteck q^2 aus den beiden anderen Seiten gegeben: man soll das Dreieck construiren. —

Auflösung.

Man beschreibe über der gegebenen Seite BC als Sehne einen Kreis (Z), welcher den gegebenen Winkel A faßt (Euclid III, 33), und suche zum Durchmesser $2R$ dieses Kreises und den beiden Seiten m, n des gegebenen Rechtecks q^2 die vierte Proportionale h_1, so daß

$$2R : m = n : h_1, \text{ oder, was dasselbe }$$
$$2R.h_1 = mn = q^2 \text{ ist.}$$

Sodann ziehe man in der Entfernung h_1 mit BC eine Parallele und bestimme die Punkte A, A_1, in welchen jene Parallele den Kreis (Z) durchschneidet. Zieht man nun AB, AC, A_1B, A_1C, so erhält man zwei congruente Dreiecke ABC, A_1BC, welche den Bedingungen unserer Aufgabe entsprechen. —

Aufgabe 15.

Figur 10.

Es ist ein Winkel BAC und ein Kreis (S) gegeben, welcher beide Schenkel des Winkels berührt: man soll auf dem Umfang des Kreises (S) einen Punkt s so bestimmen, daß wenn man durch diesen Punkt eine Tangente zieht, der Theil BC derselben, welcher zwischen den Schenkeln des gegebenen Winkels liegt, einer gegebenen Strecke bc gleich sei.

Auflösung.

Man fälle vom Mittelpunkt S auf einen Schenkel AC des gegebenen Winkels die Senkrechte SM, und trage auf denselben Schenkel von M an die gegebene Strecke bc auf, d. h. man mache $ML = bc$, errichte in L auf ML die Senkrechte LS_1, und bestimme deren Durchschnitt S_1

mit AS. Sodann beschreibe man über SS_1 als Durchmesser einen Kreis, und bestimme die Durchschnitte B, C dieses Kreises mit den Schenkeln des gegebenen Winkels. Zieht man nun BC, so geht diese durch den gesuchten Punkt s, welcher der Berührungspunkt der Geraden BC mit dem Kreis (S) ist (Lehrs. XXI, Zusatz). —

Anmerkung.

Eine andere Auflösung dieser Aufgabe gibt Unger. Siehe Ungers Euclid Aufgabe 381. —

Aufgabe 16.

Von einem Dreieck kennt man eine Seite BC, den ihr gegenüberliegenden Winkel A, und den Radius r des einbeschriebenen Kreises: man soll das Dreieck construiren.

Auflösung.

Man trage den gegebenen Winkel A auf, und beschreibe mit dem Radius r einen Kreis (S), welcher beide Schenkel berührt. — Sodann hat man nur auf dem Kreise (S) einen Punkt s so zu bestimmen, daß, wenn man durch diesen Punkt eine Tangente zieht, der Theil BC derselben, welcher zwischen den Schenkeln des gegebenen Winkels liegt, der gegebenen Seite des Dreiecks gleich sei. Die Aufgabe ist mithin auf Aufgabe 15 zurückgeführt.

Anmerkung.

Andere Aufgaben, deren Auflösungen sich an Aufgabe 15 und 16 anknüpfen, findet man in Ungers Euclid Aufgabe 383 — 396.

Aufgabe 17.

Figur 20.

Von einem Dreieck ist die Grundlinie BC, der dieser Linie gegenüberliegende Winkel A, und das Verhältniß $m : n$ der beiden anderen Seiten des Dreiecks gegeben: man soll das Dreieck construiren.

Auflösung.

Man theile die Grundlinie BC zweimal nach dem gegebenen Verhältniß, d. h. man bestimme die Punkte D, D_1 so, daß

$$BD : CD = BD_1 : CD_1 = m : n$$

ist (Harm. Bhn. Aufg. 2 S. 4), beschreibe über DD_1 als Durchmesser einen Kreis, und zugleich über BC als Sehne einen Kreis (Z), welcher den gegebenen Winkel faßt (Euclid III, 33). Schneiden sich diese beiden Kreise in A, so hat man nur AB, AC zu ziehen: dann ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis.

Da BC in D, D_1 harmonisch getheilt und überdieß $\angle DAD_1 = 90°$ ist, so sind die Winkel BAD, CAD einander gleich (Harm. Bhn., A. 1, Lehrs. XIV). Hieraus folgt

$$AB : AC = BD : CD = m : n. \text{ (Lehrs. II, Zus.) —}$$

Zusatz.

Der über DD_1 beschriebene Kreis ist der geometrische Ort für alle Dreiecke, deren Grundlinie BC ist, und in welchem die Seiten AB, AC in dem Verhältniß $m : n$ stehen. Unger gibt hiefür einen besonderen Beweis in Aufg. 588, der indeß um vieles weitläufiger ist, als unser aus der Natur des harmonischen Strahlenbüschels fließende Beweis.

Aufgabe 18.

Figur 20.

Von einem Dreieck kennt man die Gerade AD, welche den Winkel A halbirt uud die beiden dadurch gebildeten Abschnitte BD, CD der Grundlinie: man soll das Dreieck construiren.

Auflösung.

Man suche zu B, D, C den vierten, dem Punkte D zugeordneten harmonischen Punkt D_1, (Harm. Bhn. Aufg. 2.), beschreibe über DD_1 als Durchmesser einen Kreis, und aus D mit der gegebenen Distanz AD einen zweitenKreis, der den ersten in A durchschneidet. Zieht man nun AB, AC, so ist ABC das verlangte Dreick.

Aufgabe 19.

Figur 21.

G. 61. Von einem Dreieck ist die Grundlinie BC, der dieser Grundlinie gegenüberliegende Winkel A und die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten $AB^2 + AC^2 = q^2$ gegeben: man soll das Dreieck construiren.

Auflösung.

Man beschreibe über BC als Sehne einen Kreis (Z), der den gegebenen Winkel A faßt (Euclid III, 33), und errichte in der Mitte von BC die Senkrechte DE. Sodann construire man ein Quadrat, dessen Seite = q, verbinde in demselben die Mitten zweier anliegenden Seiten, und beschreibe mit dieser Distanz aus B einen Bogen, welcher die DE in E durchschneidet, und endlich aus D als Mittelpunkt mit DE als Radius einen Bogen, welcher den Kreis (Z) in A durchschneidet. — Zieht man nun AB, AC, so ist ABC das verlangte Dreieck —

Beweis

Es ist

$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$$
$$= 2(DE^2 + BD^2)$$
$$= 2BE^2.$$

Aber

$$BE = q\sqrt{1/2}, \text{ mithin}$$
$$2BE^2 = q^2, \text{ folglich}$$
$$AB^2 + AC^2 = q^2,$$

mithin sind alle Bedingungen unserer Aufgabe erfüllt. —

Aufgabe 20.

Figur 21.

Von einem Dreieck ist die Grundlinie BC, der dieser Linie gegenüberliegende Winkel A, und der Unterschied der Quadrate der beiden anderen Seiten $AB^2 - AC^2 = d^2$ gegeben: man soll das Dreieck construiren.

C. 106.

Auflösung.

Man beschreibe über BC als Sehne einen Kreis (Z), der den gegebenen Winkel faßt. — Sodann suche man zur gegebenen Grundlinie BC und der Seite d des gegebenen Quadrates die dritte geometrische Proportionale x, so daß BC : d = d : x wird, trage die Distanz x von C an in der Verlängerung von BC auf, so daß $CH_1 = x$ wird, halbire BH_1 in H und errichte in H auf BC die Senkrechte AH, welche dem Kreise (Z) in A begegnet. Zieht man nun AB, AC, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis

Es ist

$$AB^2 - AC^2 = BH^2 - CH^2$$
$$= (BH + CH)(BH - CH).$$

Aber $BH + CH = BC$

$$BH - CH = CH_1 = x.$$

Demnach

$$AB^2 - AC^2 = BC \,.\, x.$$
$$= d^2$$

wie verlangt wurde. —

Aufgabe 21.

Figur 22.

Von einem Dreieck ist ein Höhenperpendikel $AD = h_1$, ferner die aus derselben Ecke auslaufende Halbirungslinie des entsprechenden Winkels $AE = l$ und der Radius R des umschriebenen Kreises gegeben: man soll das Dreieck construiren. —

Auflösung.

Man construire den umschriebenen Kreis (Z), suche zu $AE = l$, $AD = h_1$, und dem Durchmesser $2R$ des umschriebenen Kreises die vierte Proportionale x, so daß

$$l : h_1 = 2R : x$$

wird, nehme im Umfange des Kreises (Z) den Punkt F beliebig, und beschreibe aus F als Mittelpunkt mit $FA = x$ einen Bogen, welcher den Kreis (Z) in A durchschneidet. Man trage $AE = l$ von A aus auf AF auf und beschreibe das rechtwinkelige Dreieck AED, von welchem die Hypothenuse AE und eine Kathete $AD = h_1$ bekannt sind. Sodann verlängere man DE, bis es dem Kreise (Z) in B und C begegnet, und ziehe noch AB, AC, so ist ABC das verlangte Dreieck. —

Beweis.

Nach der Construktion ist

$$AE.AF = 2Rh_1$$

Aber $2Rh_1 = AB.AC$ (Lehrs. IV, Zus.)

mithin auch

$$AE.AF = AB.AC, \text{ und}$$
$$AB : AE = AF : AC.$$

d. h. die Dreiecke ABE und AFC sind einander ähnlich, und wegen dieser Aehnlichkeit ist

$$\angle BAE = \angle EAC,$$

folglich sind alle Bedingungen unserer Aufgabe erfüllt. —

Aufgabe 22.

Figur 22.

Von einem Dreieck ist ein Höhenperpendikel AD $= h_1$, ferner die aus derselben Ecke auslaufende Halbirungslinie des entsprechenden Winkels AE $= l$, und das Rechteck AB.AC $= q^2$ der von dieser Ecke auslaufenden Seiten gegeben: man soll das Dreieck construiren. —

Auflösung.

Man suche zu AE $= l$ und den zwei Seiten m, n des gegebenen Rechteckes q^2 die vierte Proportionale, so daß

$l : m = n : x$, oder, was dasselbe

$lx = mn = q^2$ wird. —

Sodann suche man zu AD $= h_1$, AE $= l$ und AF $= x$ die vierte Proportionale 2R, so ist dies der Durchmesser des dem gesuchten Dreieck umschriebenen Kreises. Dadurch ist unsere Aufgabe auf Aufgabe 21 zurückgeführt. —

Aufgabe 23.

Von einem Dreieck sind sämmtliche Höhenperpendikel h_1, h_2, h_3 gegeben: man soll das Dreieck construiren. —

Auflösung.

Man construire ein Dreieck, dessen Seiten h_1, h_2, h_3 sind; in diesem Dreieck fälle man die Höhenperpendikel a_1, b_1, c_1 und construire ein zweites Dreieck mit den Geraden a_1, b_1, c_1 als Seiten. In diesem Dreieck ziehe man auf irgend eine Seite a_1, das zugehörige Höhenperpendikel h_1 und verlängere dasselbe über die Grundlinie hinaus, bis es gleich h_1 wird. Durch den Endpunkt dieses Perpendikels ziehe man eine Gerade a mit a_1 parallel, und verlängere die Seiten b_1, c_1, bis sie der a begegnen, so ist das zuletzt entstandene größere Dreieck das gesuchte.

Beweis,

folgt aus den Proportionen

$$a : b = h_2 : h_1$$
$$b : c = h_3 : h_2$$
$$a : c = h_3 : h_1.$$

Anmerkung.

Zwei andere Auflösungen dieser Aufgabe findet man bei Diesterweg. Siehe dessen „Geometrische Aufgaben nach der Methode der Griechen bearbeitet" Aufgabe 66. —

Aufgabe 24.

Von einem Dreieck sind die Radien r_1, r_2, r_3 sämmtlicher auswärts berührender Kreise gegeben: man soll das Dreieck construiren.

Auflösung 1.

Man suche zur halben Summe je zweier Radien und diesen Radien selbst die jedesmalige vierte Proportionale, so erhält man einzeln die drei Höhenperpendikel des Dreiecks. Dadurch aber ist unsere Aufgabe auf Aufgabe 23 zurückgeführt.

Beweis.

Nach Lehrs. XVII, Beweis, ist

$$h_1 = \frac{2r_2r_3}{r_2 + r_3}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{r_2 + r_3}{2} : r_2 = r_3 : h_1. \text{ Eben so}$$

$$\frac{r_1 + r_3}{2} : r_1 = r_3 : h_2 \text{ und}$$

$$\frac{r_1 + r_2}{2} : r_1 = r_2 : h_3.$$

Auflösung 2.

Man suche zur halben Summe je zweier der drei gegebenen Radien und der halben Differenz derselben Radien die dritte geometrische Proportionale und ziehe diese von jener halben Summe ab. Dadurch erhält man drei Gerade h_1, h_2, h_3, welche nichts anderes sind, als, die Höhenperpendikel, mithin ist unsere Aufgabe auf Aufgabe 23 zurückgeführt.

Beweis.

Figur 10.

Fällt man von D auf AB und AC die Senkrechten Dh und DN, so liegen die Punkte N, h, H in gerader Linie (Trs. Lehrsatz XXXII).

Da ferner

$$Ah = AN$$

$$\angle DAh = \angle DAN,$$

so steht DA senkrecht auf Nh, und da DA auch auf AE senkrecht ist, so sind die Geraden NH und AE parallel.

Auch ist in dem Kreisviereck $DNAP_1$

$$\angle DNP_1 = \angle DAP_1. \text{ Ferner}$$

$$\angle DAP_1 = \angle DEA = \angle DHN$$

mithin

$$\angle DNP_1 = \angle DHN$$

folglich die Dreiecke DNP_1 und DHN einander ähnlich. Aus dieser Aehnlichkeit folgt:

$$DH : DN = DN : DP_1$$

Aber $$DH = \frac{r_2 + r_3}{2}$$

$$DN = Dh = \frac{r_3 - r_2}{2}, \text{ mithin}$$

$$\frac{r_2 + r_3}{2} : \frac{r_3 - r_2}{2} = \frac{r_3 - r_2}{2} : DP_1$$

Nun ist aber

$$AA_1 = DH - DP_1 \text{ d. h.}$$

$$h_1 = \frac{r_2 + r_3}{2} - DP_1$$

mithin ist h_1 so bestimmt, wie in der Auflösung angegeben wurde; dasselbe gilt für h_2 und h_3. —

Aufgabe 25.

Von einem Dreieck kennt man zwei Höhenperpendikel h_1, h_2 und die Summe der beiden Seiten $a + b = l$, auf welchen jene Höhenperpendikel senkrecht stehen: man soll das Dreieck construiren. —

Auflösung.

Es ist

$$h_1 : h_2 = b : a, \text{ mithin auch}$$

$$h_1 + h_2 : h_2 = l : a \text{ und}$$

$$h_1 + h_2 : h_1 = l : b.$$

Hieraus bestimmt man die Seiten a und b. Hat man diese gefunden, so hat man nur mit einer derselben a in der Distanz h_1 eine Parallele zu ziehen und dieselbe mit einem Kreise zu schneiden, dessen Mittelpunkt in einem Endpunkt von a liegt und dessen Radius $= b$ ist. Verbindet man diesen Durchschnitt mit den beiden Endpunkten von a, so erhält man das verlangte Dreieck. —

Aufgabe 26.

Figur 23.

In ein Dreieck zwei Kreise zu beschreiben, welche einander und zugleich je zwei Seiten des Dreiecks berühren. —

Auflösung.

Man construire den Mittelpunkt S des einbeschriebenen Kreises und fälle von S auf diejenige Seite BC des Dreiecks, welche von beiden Krei-

sen zugleich berührt werden soll, die Senkrechte Ss. Man verbinde s mit A durch die Gerade As; dadurch erhält man zwei kleinere Dreiecke ABs und ACs. Beschreibt man in diese kleineren Dreiecke die Kreise (O), (Q), so sind diese Kreise die gesuchten. —

Beweis

Es bleibt zu zeigen, daß die Kreise (O), (Q) einander berühren. Nun ist nach Lehrs. XXI

$$AD = \frac{As + AB - Bs}{2} \text{ und}$$

$$Bs = \frac{AB + BC - AC}{2}, \text{ mithin}$$

$$\text{(I) } AD = \frac{2As + AB + AC - BC}{4}.$$

Eben so

$$AE = \frac{As + AC - Cs}{2}$$

$$Cs = \frac{AC + BC - AB}{2}, \text{ mithin}$$

$$\text{(II) } AE = \frac{2As + AB + AC - BC}{4}$$

Aus (I) und (II) folgt

$$AD = AE.$$

Nennt man nun F den Berührungspunkt des Kreises (O) mit der Geraden As, so ist

$$AD = AF, \text{ mithin auch}$$
$$AE = AF, \text{ d. h.}$$

auch der Kreis (Q) berührt die Gerade As im Punkte F, mithin berühren sich beide Kreise im Punkte F.

Zusatz.

Errichtet man in D und E Senkrechte auf AB, AC, welche sich in P durchschneiden, so ist wegen AD = AE offenbar auch PD = PE. Man kann daher aus P als Mittelpunkt, mit PD als Radius einen dritten Kreis beschreiben, der sowohl die Kreise (O), (Q) als die Geraden AB, AC berührt. In der obigen Auflösung liegt daher zugleich die Auflösung folgender Aufgabe, welche sich zugleich bei Diesterweg findet: „An einem gegebenen Dreiecke drei Kreise zu beschreiben, wovon jeder die beiden anderen und zwei Seiten des Dreiecks berühre, so aber, daß einer von ihnen die beiden übrigen umschließe.“

Siehe Diesterwegs geometrische Aufgaben. Aufgabe 119.

Inhaltsverzeichniß.

Vorbemerkung.

R bezeichnet den Radius des umschriebenen, r, r_1, r_2, r_3 die Radien der vier berührenden Kreise. $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ sind die Mittelpunkte der vier das $\triangle S_1S_2S_3$ tangirenden Kreise (Figur 10), $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$ die Radien dieser Kreise. ϱ ist der Radius des dem Höhendreieck $A_1B_1C_1$ einbeschriebenen Kreises, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 die Radien seiner auswärts berührenden Kreise. h_1, h_2, h_3 sind die drei Höhenperpendikel des ursprünglichen Dreiecks, s der halbe Umfang dieses Dreiecks. Eben so bezeichnet s_1 den halben Umfang des Höhendreiecks $A_1B_1C_1$, s_2 den halben Umfang des Dreiecks MNP (Figur 12), s_3 den halben Umfang des Dreiecks $S_1S_2S_3$ (Fig. 10). —

14

Lehrsatz IV, Fig. 4. Geht Aa durch den Mittelpunkt Z, so ist
$Ba.B\alpha : Ca.C\alpha = AB^2 : AC^2$.

Zusatz. Fig. 4. $AB.AC = 2R.A\alpha$.
$AB.AC.BC = 4R.\triangle ABC$.

Lehrsatz V, Fig. 5. Wenn $\angle BAa = \angle CAa$, so ist $BD = CE$.

Zusatz, „ „ $CA.CE = Ca.CB$.

Lehrsatz VI, „ 6, a und b Wenn $\angle ABb = \angle CB\beta$ und
$\angle ACc = \angle BC\gamma$, so ist
$\angle BAO = \angle CAQ$ und $\angle BAO_1 = \angle CAQ_1$,

Zusatz 1, Fig. 6, a und b. Satz über die Halbirungslinien der Winkel eines Dreiecks.

Zusatz 2, Fig. 6, a und b. $Aa.Bb.Cc : A\alpha.B\beta\, C\gamma = Ab.Bc.Ca : A\beta.B\gamma.C\alpha$. —

Zusatz 3, Fig. 6, a und b. $(A, c, \gamma, B) = (C, a, a_1, B) = (C, \alpha_1, \alpha, B)$.

Lehrsatz VII, Fig. 7, a und b. $AB.AC = BD.CD \pm AD^2$. —

Lehrsatz VIII, Fig. 8, a und b. Aus $BE = CD$ folgt $AB = AC$.

Lehrsatz IX, Fig. 9, a und b. Ist $\angle ADE = \angle AED = \angle BAC$, so ist
$AB^2 = BC.BE$
$AC^2 = BC.CD$
$BE : CD = AB^2 : AC^2$
$AD^2 = AE^2 = BE.CD$
$AB.AC = BC.AD = BC.AE$
$AB^2 + AC^2 = BC^2 + BC.DE$. —

Zusatz, Fig. 9, a und b. Besondere Fälle.

Zweiter Abschnitt. Seite 14.

Der umschriebene und die vier berührenden Kreise.

Lehrsatz X, Fig. 10. Die Punkte D, P, Q liegen einzeln in den Mitten von S_2S_3, S_1S_3, S_1S_2. —

Zusatz. S Durchschnitt der Höhenperpendikel im Dreieck $S_1S_2S_3$. —

Lehrsatz XI, Fig. 10. $ES = ES_1 = EB = EC$. —

Zusatz, „ „ Der Kreis (Z) geht durch die Mitten von SS_1 SS_2, SS_3.

Lehrsatz XII, „ „ $\left.\begin{matrix} S_3, A, S_2, K \\ S_1, a, S, A \end{matrix}\right\}$ harmonische Punkte.

Zusatz 1, Fig. 10. $Ba : Ca = BK : CK$.

Zusatz 2, „ „ S das Collineations-Centrum der Dreiecke ABC und $S_1S_2S_3$. —

Lehrsatz XIII, Fig. 10. $r_1 + r_2 + r_3 = 4R + r$.

Lehrsatz XIV, „ „ $rr_1r_2r_3 = (\triangle)^2$. —

Lehrsatz XV, „ „ $rr_1 + rr_2 + rr_3 + r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = ab + ac + bc$. —

Zusatz 1, Fig. 10. $AS \, . \, AS_1 + BS \, . \, BS_2 + CS \, . \, CS_3 = ab + ac + bc$.

$Aa.AE = bc = rr_1 + r_2r_3$. —

Zusatz 2, Fig. 10. $AS.BS.CS : abc = abc : AS_1.BS_2.CS_3$.

$AS_2.BS_3.CS_1 = abc$.

Lehrsatz XVI, Fig. 10. $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$. —

Lehrsatz XVII, „ „ $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$.

Zusatz 1, „ „ $r_1r_2r_3 = r(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3) = s(\triangle)$.

Zusatz 2, „ „ $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{h_1} = \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$. —

Zusatz 3, „ „ $h_1 = \frac{2rr_1}{r_1 - r}$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} = 2\left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right)$$

Lehrsatz XVIII, „ „ $r = \frac{\triangle}{s}$, $r_1 = \frac{\triangle}{s - a}$, $r_2 = \frac{\triangle}{s - b}$, $r_3 = \frac{\triangle}{s - c}$. —

Zusatz, „ „ $\triangle = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}$

$(s - a)\,(s - b)\,(s - c) = r^2s$.

Lehrsatz XIX, Fig. 10. $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = s^2$

Zusatz 1, „ „ $(s - a)^2 = r_2r_3 - r(r_2 + r_3)$.

Zusatz 2, „ „ $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = (4R + r)^2 - 2s^2$.

„ „ $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 - r\,(r_1 + r_2 + r_3) = \frac{1}{2}\,(a^2 + b^2 + c^2)$. —

Lehrsatz XX, Fig. 10. $AO + BO + CO = 2(R + r)$

Zusatz 1, „ „ $AO = 2Za = DH - EH$.

Zusatz 2, „ „ $A_1O = EH - DP_1$

Zusatz 3, „ „ $AO^2 + BC^2 = 4R^2$.

Lehrsatz XXI, „ „ $AL = Bs_2 = Cs_3 = s$, $AM = s - a$, $Bs = s - b$, $CM = s - c$,

Zusatz, Fig. 10. $s_2s_3 = b + c$; $ss_1 = c - b$; $ss_2 = b$, $ss_3 = c$.

Lehrsatz XXII, Fig. 10. $VS_1 = VS_2 = VS_3 = 2R$. $VZ = SZ$.
Zusatz 1, „ „ Beziehungen zwischen dem ursprünglichen Dreieck und dem Höhendreieck.
Zusatz 2, Fig. 10. V, W, Z, S vier harmonische Punkte.
Lehrsatz XXIII, Fig. 10. $\triangle S_1S_2S_3 = 2Rs$.
Zusatz, Fig. 10. $\triangle S_1S_2S_3 : \triangle ABC = 2R : r$.
Lehrsatz XXIV, Fig. 10. $S_1S_2.S_1S_3.S_2S_3 = 16R^2s$.
Zusatz, Fig. 10. $S_1S_2.S_1S_3.S_2S_3 : AB.AC.BC = 4R : r$
Lehrsatz XXV, Fig. 10. $SS_1.SS_2.SS_3 = 16R^2r$.
Zusatz 1, „ „ $SS_1.SS_2 SS_3.S_1S_2.S_1S_3.S_2S_3 = (4R)^4\triangle$.
$SS_1.SS_2.SS_3 : S_1S_2.S_1S_3.S_2S_3 = r . s$.
Zusatz 2, Fig. 10. Beziehung zwischen den Höhenperpendikeln und den Radien der um- und einbeschriebenen Kreise. —
Lehrsatz XXVI, Fig. 10. $AS.BS.CS = 4Rr^2$.
„ „ $AS_1.BS_1.CS_1 = 4Rr_1^2$.
Zusatz 1, „ „ $AS.BS.CS = (r_1 - r)(r_2 - r)(r_3 - r)$.
„ „ $AS_1.BS_1.CS_1 = (r_1 - r)(r_1 + r_2)(r_1 + r_3)$.
„ „ $AS.BS.CS.AS_1.BS_1.CS_1.AS_2.BS_2.CS_2.AS_3.BS_3.CS_3 = (abc)^4$: —
Zusatz 2, Fig. 10. $AS.BS.CS . SS_1.SS_2.SS_3 = r : 4R$.
„ „ $AS.BS.CS : SS_1.SS_2.SS_3 = AB.AC.BC : S_1S_2.S_1S_3.S_2S_3$. —
Lehrsatz XXVII, Fig. 10. $AS_1.BS_2.CS_3 = R (a + b + c)^2 = (r_1 + r_2)(r_1 + r_3)(r_2 + r_3)$. —
Zusatz 1, Fig. 10. Anderer Ausdruck für Lehrsatz XXVII.
Zusatz 2, „ „ $AS_2.BS_3.CS_1 = abc$.
Zusatz 3, „ „ $AS_1.BS_2.CS_3 : S_1S_2.S_1S_3.S_2S_3 = s : 4R$.
Zusatz 4, „ „ $AS_1^2 + BS_2^2 + CS_3^2 - (AS^2 + BS^2 + CS^2) = 16R(R + r)$.
Zusatz 5, „ „ $AS_1^2 + BS_2^2 + CS_3^2 = (r_1 + r_2 + r_3)^2 + r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3$. —
Zusatz 6, Fig. 10. $AS^2 = (r_2 - r)(r_3 - r)$. —
Lehrsatz XXVIII, Fig. 10. $ES.FS.GS = 2R^2r$.
$ES_1.PS_1.QS_1 = 2R^2r_1$.
Zusatz 1, Fig. 10. $ES_1.PS_1.QS_1 + DS_2.FS_2.QS_2 + DS_3.GS_3 PS_3 - ES.FS.GS = 8R^3$.
Zusatz 2, „ „ $SS_1.SS_2.SS_3 = 16R^2r$.
$SS_1.S_2S_1.S_3S_1 = 16R^2r_1$.
Lehrsatz XXIX, Fig. 10. $ES^2 + FS^2 + GS^2 = 2R(2R - r)$.

Zusatz, Fig. 10. $SS_1^2 + SS_2^2 + SS_3^2 = 8R(2R - r)$
$AS.BS.CS : SS_1.SS_2.SS_3 = SS_1.SS_2.SS_3 : (4R)^3$.

Lehrsatz XXX, Fig. 10. $ES_1^2 + PS_1^2 + QS_1^2 = 2R(2R + r_1)$
$FS_2^2 + DS_2^2 + QS_2^2 = 2R(2R + r_2)$

Zusatz 1, Fig. 10. $ES^2 + FS^2 + GS_2 + PS_1^2 + QS_2^2 + DS_3^2 = 12R^2$.

Zusatz 2, „ „ $SS_1^2 + S_2S_1^2 + S_3S_1^2 = 8R(2R + r_1)$.
$SS_1^2 + SS_2^2 + SS_3^2 + S_1S_2^2 + S_1S_3^2 + S_2S_3^2 = 48R^2$.

Zusatz 3, Fig. 10. $(SS_1.S_2S_1.S_3S_1)^2 = (4R)^3.AS_1.BS_1.CS_1$.

Lehrsatz XXXI, „ „ $S_1S_2^2 + S_1S_3^2 + S_2S_3^2 = 8R(r_1 + r_2 + r_3)$.

Zusatz, Fig. 10. $SS_2^2 + SS_3^2 + S_2S_3^2 = 8R(4R - r_1)$.

Lehrsatz XXXII, Fig. 10. $SS_1^2 + S_2S_3^2 = SS_2^2 + S_1S_3^2 = SS_3^2 + S_1S_2^2 = 16R^2$. —

Lehrsatz XXXIII, Fig. 10. $S_1S_2.S_1S_3.S_2S_3 = S_1S_2.SS_1.SS_2 + S_1S_3.SS_1.SS_3 + S_2S_3.SS_2.SS_3$.

Lehrsatz XXXIV, „ „ $AS.ES = 2Rr$; $AS_1.ES_1 = 2Rr_1$

Zusatz, Fig. 10. $AS.SS_1 = BS.SS_2 = CS.SS_3 = 4Rr$.
$AS_1.SS_1 = 4Rr_1$.

Lehrsatz XXXV, Fig. 12, a und b. $\triangle ABC : \triangle MNP = 2R : \begin{Bmatrix} r \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix}$

Zusatz 1, Fig. 12, a und b. $F_1 + F_2 + F_3 = 2\triangle ABC + F$

Zusatz 2, „ „ „ $AB.AC.BC : MP.NP.MN = 2R^2 : \begin{Bmatrix} r^2 \\ r_1^2 \\ r_2^2 \\ r_3^2 \end{Bmatrix}$

Dritter Abschnitt. Seite 51.

Die Höhenperpendikel.

Lehrsatz XXXVI.
$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = (h_1 + h_2 + h_3)\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right)$$

Zusatz.
$$(-a + b + c)\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = (-h_1 + h_2 + h_3)\left(-\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right)$$

Lehrsatz XXXVII, Fig. 10. Die um AOB, AOC, BOC beschriebenen Kreise = Kreise (Z).

Lehrsatz XXXVIII. $\triangle ABC = Rs_1$

Zusatz 1. $\triangle S_1S_2S_3 : \triangle ABC = 2s : s_1$

Zusatz 2. $\triangle ABC : \triangle A_1B_1C_1 = R : \varrho$

$\triangle S_1S_2S_3 : \triangle A_1B_1C_1 = 2R^2 : r\varrho$

Zusatz 3. $\triangle S_1S_2S_3 : \triangle ABC = \triangle ABC : \triangle MNP$

Zusatz 4. $AB.AC.BC : A_1B_1.A_1C_1.B_1C_1 = 2R : \varrho$

Lehrsatz XXXIX, Fig. 12, a u b. $\triangle MNP : \triangle A_1B_1C_1 = \begin{Bmatrix} r \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} : 2\varrho.$

Lehrsatz XL, $\mathfrak{R} : r = s : s_2$

Zusatz. $s_3 : s_2 = 2R : r$

$\mathfrak{R} : R = s_1 : s_2.$

Lehrsatz XLI, Fig. 10. $h_1h_2h_3 = 2s_1\triangle.$

Zusatz 1. „ „ $\triangle = \sqrt{(\frac{1}{2}Rh_1h_2h_3)}$

$Aa.Bb.Cc = r_1r_2r_3.$

$AE.BF.CG = SS_1.SS_2.SS_3.$ —

$Sa.Sb.Sc = \frac{1}{2}Rr^2; \ S_1a.S_2b.S_3c = \frac{1}{2}Rs^2.$

$S_1a.S_2b.S_3c = \frac{1}{4}s. \triangle S_1S_2S_3.$ —

Zusatz 2, Fig. 10. $\frac{Sa}{Aa} + \frac{Sb}{Bb} + \frac{Sc}{Cc} = 1.$

$\frac{AS}{Aa} + \frac{BS}{Bb} + \frac{CS}{Cc} = 2.$ —

Zusatz 3. $(\triangle S_1S_2S_3)^2 = R\,(r_1 + r_2)\,r_1 + r_3)\,(r_2 + r_3)$

$(\triangle)^2 = \frac{1}{2}R\,(\varrho_1 + \varrho_2)\,(\varrho_1 + \varrho_3)\,(\varrho_2 + \varrho_3).$

Zusatz 4. $h_1h_2h_3.\ AS.BS.CS = 8r^2\,(\triangle)^2.$ —

Zusatz 5. $h_1h_2h_3 = 2R\,(\varrho_1\varrho_2 + \varrho_1\varrho_3 + \varrho_2\varrho_3).$

Lehrsatz XLII. $s : s_1 = R : r$

Zusatz 1. $h_1h_2 + h_1h_3 + h_2h_3 = 2ss_1.$ —

Zus. 2. $r_1r_2r_3 : h_1h_2h_3 = R : 2r.$

$r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 : h_1h_2 + h_1h_3 + h_2h_3 = R : 2r.$

Lehrsatz XLIII, Fig 11. $xy = s_1.$ —

Lehrsatz XLIV. $a^2 + b^2 + c^2 = 4R\,(2R + \varrho).$

Zusatz. $BO^2 + CO^2 + BC^2 = 4R\,(2R - \varrho_1).$

Lehrsatz XLV. $AO^2 + BO^2 + CO^2 = 4R\,(R - \varrho).$

Zusatz. $A_1O.B_1O.C_1O : AO.BO.CO = AO.BO.CO : (2R)^3.$ —

Lehrsatz XLVI. $r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = AO^2 + BO^2 + CO^2 + 4R^2.$

Zusatz. $a^2 + b^2 + c^2 + r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 16R^2.$

Lehrsatz XLVII. $A_1O.B_1O + A_1O.C_1O + B_1O.C_1O = 2\varrho\,(R + r).$

Lehrsatz XLVIII. $AO.BO + AO.CO + BO.CO = 2R\,(A_1O + B_1O + C_1O)$.

Zusatz. Fig. 12. $AO.BC + BO.AC + CO.AB = 4\triangle ABC$. —

Lehrsatz IL. $A_1O.B_1O.C_1O : AO.BO.CO = \varrho : 2R$.

Zusatz. $\varrho_1\varrho_2\varrho_3 : h_1h_2h_3 = \varrho : 2R$

$A_1O.B_1O.C_1O.h_1h_2h_3 = (A_1B_1.A_1C_1.B_1C_1)^2$.

Lehrsatz L. $R\,(A_1O + B_1O + C_1O) = r^2 + R\,(2r + \varrho)$.

Lehrsatz LI. $A_1O^2 + B_1O^2 + C_1O^2 = s_1^2 - \varrho\,(4R - \varrho)$.

Zusatz 1. $A_1O^2 + B_1O^2 + C_1O^2 = a_1b_1 + a_1c_1 + b_1c_1 - 6R\varrho$.

Zusatz 2. $(A_1O + B_1O + C_1O)^2 = s_1^2 + \varrho\,(4r + \varrho)$.

Lehrsatz LII., Fig. 11. $AO_1 + BO_2 + CO_3 = 2\,(R - \varrho)$.

Lehrsatz LIII, „ „ $BO_2 : A_1O = A_1O : CO_3$.

Zusatz. „ „ $A_1O.B_1O.C_1O = AO_1.BO_2.CO_3$.

Lehrsatz LIV. „ „ $AO^2 + BO^2 + CO^2 = 2R\,(AO_1 + BO_2 + CO_3)$.

Lehrsatz LV. „ „ $AO_1^2 + BO_2^2 + CO_3^2 = 4R^2 + 2(\varrho^2 - s_1^2)$.

Lehrsatz LVI., Fig. 13. $EH.AL = r^2$.

Lehrsatz LVII, „ „ $EH\,(h_1 + 2r_1) = r_1^2$.

Zusatz.

$h_1 - 2r : h_1 = r : r_1$

$h_1 : h_1 + 2r_1 = r : r_1$

$h_1 - 2r : h_1 + 2r_1 = r^2 : r_1^2$

$(h_1 - 2r)\,(h_2 - 2r)\,(h_3 - 2r) : (h_1 + 2r_1)\,(h_2 + 2r_2)\,(h_3 + 2r_3) = r^4 : s^4$.

Vierter Abschnitt. Seite 77.

Die Distanzen der wichtigsten Punkte im Dreieck.

Hülfssatz, Fig. 10, a und b. $ZS^2 = ZA^2 \mp AS.ES$. —

Lehrsatz LVIII, Fig. 10. $ZS^2 = R^2 - 2Rr$.

$ZS_1^2 = R^2 + 2Rr_1$. —

Zusatz 1, „ „ $ZS^2 + ZS_1^2 + ZS_2^2 + ZS_3^2 = 12R^2 = VS_1^2 + VS_2^2 + VS_3^2$. —

Zusatz 2, „ „ $VS^2 = 4(R^2 - 2Rr)$

Zusatz 3, „ „ $VS^2 + VS_1^2 + VS_2^2 + VS_3^2 = SS_1^2 + SS_2^2 + SS_3^2$. —

Zusatz 4, „ „ $VW^2 = \frac{4}{9}(R^2 - 2Rr)$; $ZW^2 = \frac{1}{9}(R^2 - 2Rr)$; $SW^2 = \frac{16}{9}(R^2 - 2Rr)$

Lehrsatz LIX, Fig. 10. $EH : Hs = Hs : DP_1$. —

Zusatz 1. $DP_1 = \frac{(c - b)^2}{2(r_1 - r)}$. —

Zusatz 2, „ „ $CH.AP_1 = \frac{1}{4}(c^2 - b^2)$. —

Lehrsatz LX, Fig. 13. $SQ^2 + A_1O.AL = r^2$.

Lehrsatz LXI, „ „ $OS^2 = 2r^2 - 2R\varrho$.

Lehrsatz LXII. $OS_1^2 = 2r_1^2 - 2R\varrho$

$OS_2^2 = 2r_2^2 - 2R\varrho$.

Zusatz 1. $OS^2 + OS_1^2 + OS_2^2 + OS_3^2 = 16R(R - \varrho)$

Zusatz 2. $\mathfrak{S}S^2 + \mathfrak{S}_1S^2 + \mathfrak{S}_2S^2 + \mathfrak{S}_3S^2$

$= 4(SS_1^2 + SS_2^2 + SS_3^2)$

$= 4(VS^2 + VS_1^2 + VS_2^2 + VS_3^2)$. —

Lehrsatz LXIII. $OZ^2 = R^2 - 4R\varrho$.

Zusatz 1, Fig. 13. $OZ_1^2 = {}^1/_4R^2 - R\varrho$.

Zusatz 2, „ 10. $OV^2 = 4R(R - r) - 2(3R\varrho + r^2)$

Zusatz 3. $ZG^2 = \frac{1}{9}(R^2 - 4R\varrho)$. $Z_1G^2 = \frac{1}{36}(R^2 - 4R\varrho)$, $OG^2 = \frac{4}{9}(R^2 - 4R\varrho)$.

Lehrsatz LXIV. $Z_1S = {}^1/_2R - r$
$Z_1S_1 = {}^1/_2R + r_1$; $Z_1S_2 = {}^1/_2R + r_2$; $Z_1S_3 = {}^1/_2R + r_3$.

Zusatz 1. Der Kreis (Z_1) berührt die Kreise (S), (S_1), (S_2), (S_3). —

Zusatz 2. $Z_1S + Z_1S_1 + Z_1S_2 + Z_1S_3 = 6R$.

Zusatz 3. $Z_1S^2 + Z_1S_1^2 + Z_1S_2^2 + Z_1S_3^2 = ZS^2 + ZS_1^2 + ZS_2^2 + ZS_3^2 + 4ZZ_1^2$.

Zusatz 4. $Z_1V^2 = R(\frac{9}{4}R - 2\varrho) - r(3R + r)$. —

Fünfter Abschnitt. Seite 89.

Aufgaben.

Aufgabe 1. Es ist ein Dreieck ABC gegeben, man soll die Mittelpunkte seiner vier tangirenden Kreise bestimmen.

„ 2, Fig. 10. Gegeben S_1, S_2, S_3: gesucht $\triangle$.

„ 3, „ „ Gegeben a, $\angle A$, r: gesucht $\triangle$.

„ 4, Fig. 15. Gegeben a, $\angle A$, $b + c$: gesucht $\triangle$.

„ 5, „ 16. Gegeben a, $\angle A$, $c - b$: gesucht $\triangle$.

„ 6, „ 10. Gegeben a, $b + c$, r: gesucht $\triangle$.

„ 7. Gegeben $2s$, h_1, r: gesucht $\triangle$.

„ 8. Gegeben a, h_1, r: gesucht $\triangle$.

„ 9, Fig. 17. Gegeben $\angle A$, h_1, r: gesucht $\triangle$.

„ 10, „ 18. Gegeben a, R, r: gesucht $\triangle$.

„ 11, „ 19. Gegeben $\angle A = 90°$, R, ZS: gesucht $\triangle$.

„ 12, „ 12. Gegeben $\angle A$, h_1, R: gesucht $\triangle$.

„ 13. Gegeben $\angle A$, h_1, $bc = q^2$: gesucht $\triangle$;

„ 14. Gegeben a, $\angle A$, $bc = q^2$: gesucht $\triangle$.

„ 15, „ 10. Gegeben $\angle BAC$ und (S): s so zu bestimmen, daß die durch s gezogene Tangente BC einer gegebenen Strecke bc gleich sei.

„ 16. Gegeben a, $\angle A$, r: gesucht $\triangle$.

„ 17. Gegeben a, $\angle A$, $b : c = m : n$: gesucht $\triangle$.

„ 18, Fig. 20. Gegeben AD, BD, CD: gesucht $\triangle$.

„ 19, „ 21. Gegeben a, $\angle A$, $b^2 + c^2 = q^2$. gesucht $\triangle$.

„ 20, „ „ Gegeben a, $\angle A$, $c^2 - b^2 = d^2$: gesucht $\triangle$.

„ 21, „ 22. Gegeben h_1, AE, R: gesucht $\triangle$.

„ 22, „ „ Gegeben h_1, AE, $bc = q^2$: gesucht $\triangle$.

„ 23. Gegeben h_1, h_2, h_3: gesucht $\triangle$.

„ 24. Gegeben r_1, r_2, r_3: gesucht $\triangle$.

„ 25. Gegeben h_1, h_2, $a + b = l$: gesucht $\triangle$.

„ 26, Fig. 23. In ein Dreieck zwei Kreise zu beschreiben, welche einander, und zugleich je zwei Seiten des Dreiecks berühren.

